# A DILATAÇÃO TÉRMICA EM UMA PERSPECTIVA DE VARIAÇÃO INFINITESIMAL ABORDADA NO CURSO BÁSICO DE FÍSICA DA ENGENHARIA

*Thermal Expansion in an Infinitesimal Variation Perspective Addressed in the Basic Engineering Physics Course*

**Lúcio Ângelo Vidal** [1] (lucio.vidal@cba.ifmt.edu.br)
*Rua Professora Zulmira Canavarros, nº 95 – CEP: 78005-200, Centro, Cuiabá – MT*
*IFMT Campus Cuiabá*
**Andreia da Silva Tavares** [2] (andreia.physical@gmail.com)
*UNIVAG - Universidade de Várzea Grande*
*Avenida Dom Orlando Chaves, 2655 - Cristo Rei, Várzea Grande - MT, 78118-000*
**Sidney da Silva Farias**[3] (sidney@prof.colegiocasaforte.com.br)
*Colégio Casa Forte*
*Praça de Casa Forte, 548 - Casa Forte, Recife - PE, 52061-420*

*Recebido em: 22/12/2020*
*Aceito em: 29/04/2021*

## Resumo

Este artigo descreve a realização de uma aula de Física em que foi ensinado a dezenove alunos do terceiro período das Engenharias em uma universidade particular da grande Cuiabá a dilatação térmica partindo-se do conceito de variação infinitesimal. Tal perspectiva não é abordada em livro algum desta disciplina no ciclo básico dos cursos pertencentes à área de ciências exatas. Foi ressaltada na aula que há pelo menos três maneiras de se apresentar a equação. No princípio da aula, foi aplicado um breve teste matemático para analisar se os discentes tinham embasamento matemático para compreender a abordagem e ao término da aula, fez o uso de um pequeno teste qualitativo para verificar a compreensão de em que circunstâncias aplicar cada uma das três expressões matemáticas. A maioria dos alunos acertaram 60% das questões qualitativas.

**Palavras-Chave:** Dilatação variando exponencialmente com a temperatura; superdilatação; dilatação em termos de variação infinitesimal

## Abstract

This article describes the realization of a Physics class in which nineteen students from the third period of Engineering at a private university in the greater Cuiabá were taught thermal expansion based on the concept of infinitesimal variation. This perspective is not addressed in any book of this discipline in the basic cycle of courses belonging to the area of exact sciences. It was pointed out in class that there are at least three ways of presenting the equation. At the beginning of the class, a brief mathematical test was applied to analyze whether the students had a mathematical basis to understand the approach and at the end of the class, made use of a small qualitative test to verify the understanding of under which circumstances to apply each of the three mathematical expressions. Most students got 60% of the qualitative questions right.

**Keywords:** Expansion varying exponentially with temperature; overdilation; dilation in terms of infinitesimal variation.

1 professor de Física do IFMT; 2 professora de Física da UNIVAG; 3 professor de matemática do Colégio Casa Forte

## Introdução

Em livros de Física do Ensino Médio e de Ensino Superior, o que se observa quando se apresentam as equações de dilatação térmica linear, superficial ou volumétrica é a menção de que a variação de comprimento, de área e de volume variam linearmente com a temperatura.

Tal abordagem é compreensível nos livros de Ensino médio, pois não há neste nível de ensino o estudo de variações infinitesimais. O que parece não ser normal é o mesmo tipo de apresentação para obras de nível superior de Física principalmente no tocante à abordagem Matemática.

Levando em consideração que o estudo de dilatação ocorre no segundo período dos cursos das faculdades de ciências exatas, o aluno já entende o conceito de limite, de derivada, de integral e da função logarítmica. Então, por que razão a apresentação da formulação matemática no livro ainda denota que qualquer tipo de dilatação é diretamente proporcional à temperatura?

Compreende-se que as situações que envolvem variações infinitesimais de dilatação possam não ser usuais no cotidiano hoje, mas quem garante que não terão grandes implicações em um futuro próximo?

Antes do término do século XX, via-se como inconcebível a capacitância de 1 Farad por exemplo. A unidade em questão era considerada muito alta. Atualmente, sabe-se que há capacitores disponíveis comercialmente até da ordem de quilofarads graças ao carvão vegetal ativado por ter uma área superficial muito grande devido a sua estrutura esponjosa em nível nanométrico (BAUER et al, 2012).

O entendimento aqui apresentado é que a abordagem matemática pode ser útil fisicamente desde que sejam descobertos materiais ou substâncias que sofram superdilatação, ou seja, tenham coeficientes de dilatação com valores muito maiores em comparação aos que se conhecem na atualidade (da ordem de $10^{-6} {}^{\circ}C^{-1}$ no caso linear).

Outras situações em que se aplicariam equações a partir de variações contínuas, podem-se citar: situações em que o coeficiente de dilatação seja função da temperatura; ocasiões em que se conhece o mesmo coeficiente em determinados intervalos de temperatura e circunstâncias em que o coeficiente de dilatação é constante e que o produto deste pela variação de temperatura tem valor superior a 0,1.

Será que há realmente a necessidade de se analisar as três situações mencionadas no parágrafo anterior? Imagina-se que sim. Afinal de contas, não se pode ter o conhecimento científico como pronto e acabado, ele está sujeito a mudanças com o tempo (CUNHA, 1996). Além disso, se o ser humano busca uma formação educacional omnilateral, supõe-se que todas as visões sobre uma realidade são importantes, inclusive as que decorrem do modelo matemático.

Ao buscar publicações que versem sobre a mesma temática deste trabalho, verificou-se que Mors (2016) aborda algo relacionado à variação infinitesimal da dilatação apresentando uma equação para a dilatação linear que poderia ser deduzida por um professor se o coeficiente de dilatação linear fosse constante. A equação seria:

$$L = L_0 e^{\alpha(\theta_f - \theta_i)} \; (1)$$

onde L seria comprimento final do material, $L_0$ seria o comprimento inicial, α seria o coeficiente de dilatação, $\theta_f$ a temperatura final e $\theta_i$ a temperatura inicial.

Apesar de aqui se concordar com a equação mostrada por Mors (2016), sente-se a falta da dedução sugerida que o professor poderia realizar em sala de aula. O mesmo autor não menciona que implicações haveria no fato de $\alpha$ não ser constante com a temperatura nem mesmo em uma formulação matemática mais geral do que aquela apresentada na equação 1.

Ainda retomando o conceito de variação de dimensões de algo em função da temperatura, Resnick et al (2003) afirmam que para os líquidos o coeficiente de dilatação volumétrica é praticamente independente da temperatura, entretanto o mesmo não ocorre com os gases. Diante disto, percebe-se a importância da abordagem feita trazendo a variação dos coeficientes de dilatação em função da temperatura.

Visando motivar mais ainda o aprendizado do estudante, foram apresentadas também equações análogas matematicamente à dilatação nos regimes de capitalização contínua e simples da matemática financeira.

Desta forma, os objetivos da aula foram: identificar inicialmente os conhecimentos matemáticos que os alunos detinham antes da explanação; ensinar o cálculo de dilatação em uma perspectiva de variações infinitesimais passo a passo e verificar o aprendizado no que concerne à aplicação de cada umas das três fórmulas de acordo com o tipo de problema apresentado.

## Revisão Bibliográfica

Aqui dar-se-á ênfase a conceitos matemáticos bastante úteis para a compreensão do que foi ensinado na aula de dilatação pelo viés proposto. Desta maneira, abordam-se nesta sessão: continuidade de uma função e integral, logaritmos e suas propriedades, e por fim, a aproximação de Taylor para $e^x$ para x muito pequeno.

### *Continuidade de uma Função e Integral*

Do ponto de vista matemático, em geral uma função matemática é contínua quando o seu gráfico não apresenta “saltos” e “furos” (IEZZI et al, 1979) ou como sugere Ryan (2009) uma função é contínua quando se pode desenhá-la sem retira o lápis da folha de papel.

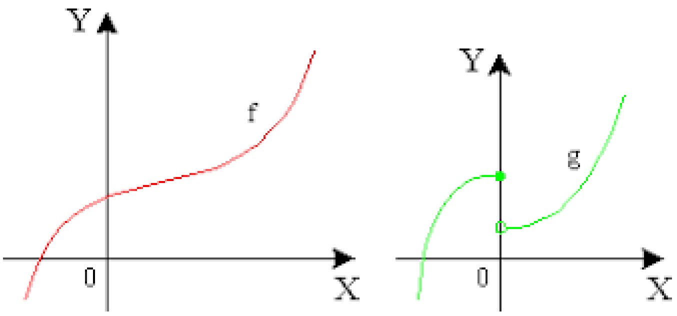


**Figura 1-** Duas funções y(x) com f contínua e g descontínua. Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm13/document/continua/contin_1/contin_1.htm.

Menciona-se o conceito de continuidade de uma função aqui porque não faz sentido calcular integral em funções que têm todos os seus elementos discretos (pontuais) como mostra a figura 2. Ainda deve-se enfatizar que pelo fato de a função da figura 2 não ser contínua, jamais se poderia ligar os pontos pertencentes a esta.

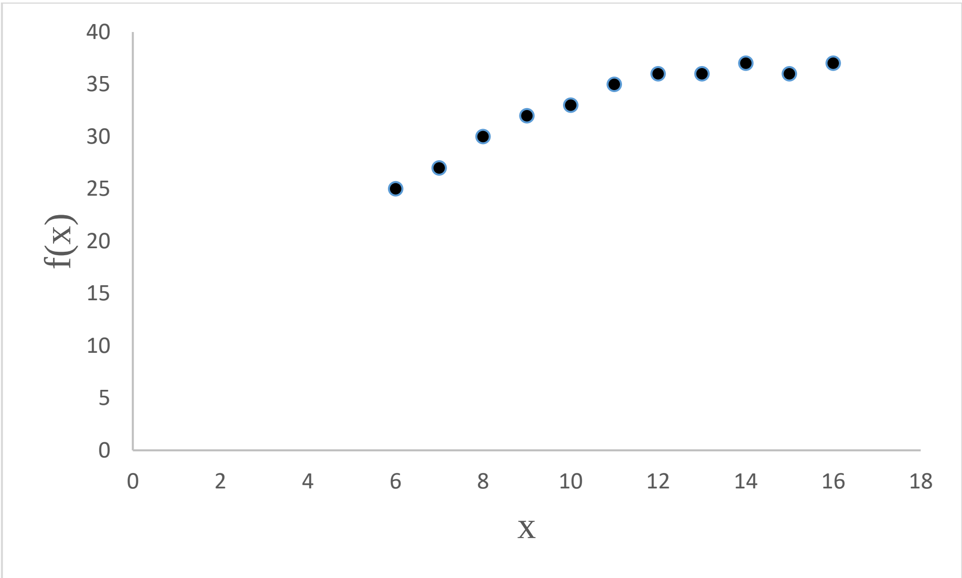


**Figura 2** – Função descontínua. Fonte: Acervo próprio.

O cálculo integral aparece na Física, por exemplo, quando se deseja: 1) calcular o efeito de distribuições contínuas de alguma grandeza relativa a algum corpo que não seja puntiforme em algum local do espaço; 2) computar o efeito de variáveis cinemáticas contínuas em função tempo; 3) calcular a velocidade média das moléculas de um gás ideal; 4) calcular grandezas termodinâmicas que variam infinitesimalmente com a temperatura e 5) cálculo de dilatação de comprimento, área e volume em função da temperatura (embora se reconheça a não usualidade deste fato em livros de Física de Ensino Superior).

*Logaritmo*

Considerando $a$ e $b$ dois números reais e positivos de forma que $a$ seja diferente da unidade, define-se o logaritmo de $b$ na base $a$ o expoente de $a$ de forma que a potência seja igual a $b$ (IEZZI et al, 1977*)*. Assim, em termos de equação tem-se:

$$\log_a b = x \quad ou \quad a^x = b \quad (2)$$

Dentre os diversos valores que a base *a* pode assumir, considera-se que a base 10 (dez) e base neperiana (base *e* cujo valor vale 2,718...) são os dois sistemas de logaritmos mais importantes (IEZZI et al, 1977). Ainda em relação a este último, desenvolvido pelo matemático John Neper, pode-se representá-lo por $log_e b$ ou $ln\, b$.

Há três propriedades que tornam o uso de logaritmos bastante proveitoso, são elas:

1.Logaritmo do produto: O logaritmo do produto de dois números reais positivos é igual à soma dos logaritmos dos dois números, ou seja:

$$log_a(bc) = log_a b + log_a c \quad (3)$$

2. Logaritmo do quociente: O logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual à diferença entre o logaritmo do numerador e o logaritmo do denominador, isto é:

$$log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c \quad (4)$$

3. Logaritmo da potência: O logaritmo de uma potência de base real e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência, matematicamente tem-se:

$$log_a b^d = d\, log_a b \quad (5)$$

Na aula ministrada, fez-se o uso exclusivo da propriedade 2 e utilizou-se o sistema neperiano de logaritmos.

*Aproximação de Taylor para $e^x$ para x muito pequeno*

Tal aproximação desenvolvida por Brook Taylor é muito importante porque aproxima vários tipos de funções transcendentais por uma função polinomial de maneira simples (MUNEM e FOULIS, 1982).

A série de Taylor para $e^x$ expandido em torno de x = 0 é dada pela fórmula:

$$e^x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (6)$$

No caso de x ser muito pequeno em relação a 1, pode-se aproximar $e^x$ para 1+x, pois pequenas quantias elevadas a expoentes grandes vão cada vez mais diminuindo de valor. Tal aproximação foi utilizada para mostrar aos discentes na aula como é possível sair da expressão exponencial para a expressão linear.

**Materiais e Métodos**

A aula do início ao fim durou 2 horas e 38 minutos e foi ministrada de maneira online pelo Google Meet no dia 2 de setembro de 2020 no turno da noite. Os testes que foram aplicados aos alunos eram mostrados na tela do computador e as respostas podiam ser enviadas por e-mail institucional do professor ou pela plataforma AVA da instituição privada de ensino.

Antes de se fazer a abordagem da variação infinitesimal da dilatação com a temperatura na aula, aplicou-se questões para serem resolvidas pelos alunos em 40 minutos com: a) o cálculo de três integrais que seriam importantes na compressão do fenômeno; b) a solicitação de escrever em forma exponencial uma equação logarítmica; c) determinar o valor da base neperiana elevada a um número inferior a 0,1 fazendo-se o uso da aproximação por série de Taylor.

*Teste de Sondagem Matemática*

*1. Calcule:*

$a) \int_{1}^{3} 5dx$

$b) \int_{1}^{2} 4xdx$

$c) \int_3^6 \frac{dx}{x}$

*2. Escreva na forma exponencial a equação* $ln\, x = 2$.

*3. Utilizando a aproximação* $e^x \approx 1 + x$ *para x ≤ 0,1; calcule* $e^{0,05}$.

*OBS: Na resolução de todas as questões acima, não use calculadora. Se algum cálculo for inexato, apenas represente-o.*

*A aula de cálculo da dilatação através da variação infinitesimal*

A aula propriamente dita começa exatamente a partir do momento em que se apresenta a dilatação linear na perspectiva de variação infinitesimal de temperatura. A parir disso, mostram-se todos os detalhes da dedução da equação 7 que mostra como o comprimento final de um objeto varia em função da base neperiana elevada a uma integral de um coeficiente de dilatação linear que varia com a temperatura.

Em seguida, faz-se a consideração que se este último é constante, a formulação para o tamanho final do material passa a variar com a base neperiana elevada ao produto entre o mencionado coeficiente e a variação de temperatura.

Por fim, faz-se a análise de que se o último produto mencionado for menor que 0,1; recai-se na situação em que o comprimento final varia linearmente com a variação de temperatura.

*A dedução Matemática na Aula*

Trazendo a ideia de infinitesimal para o conceito de dilatação linear, poder-se-ia dizer que uma variação infinitesimal no comprimento inicial de um material seria diretamente proporcional a uma constante que variaria com a temperatura, ao comprimento inicial deste material e a variação infinitesimal desta temperatura (pensar na temperatura também um sendo um contínuo de valores). O que permitiria escrever a equação 7:

$$dL_0 = \alpha(T) L_0 dT \ (7)$$

Observe que a equação 7 é totalmente análoga à expressão que figura em livros de Física independentemente do nível de Ensino.

Em seguida, passa-se o comprimento inicial dividindo o lado esquerdo da equação obtendo-se a equação 8:

$$\frac{dL_0}{L_0} = \alpha(T)dT \ (8)$$

A variação infinitesimal é a variação em um pequeno "pedaço" do material, mas o que se deseja é descobrir a variação total, portanto integra-se ambos os lados da igualdade como mostra a equação 9:

$$\int_{L_i}^{L_f} \frac{dL_0}{L_0} = \int_{T_0}^{T} \alpha(T)dT \ \ (9)$$

A integral do lado esquerdo leva ao logaritmo neperiano do comprimento inicial entre $L_i$ e $L_f$. Como não sabe qual é a expressão de α com a temperatura, o lado direito da equação mantém-se intacto como mostra a equação 10:

$$\ln L_f - \ln L_i = \int_{T_0}^{T} \alpha(T)dT \ \ (10)$$

Das propriedades dos logaritmos, sabe-se que a diferença de logaritmos na mesma base leva ao logaritmo do quociente como mostra a equação de número 11:

$$\ln \left(\frac{L_f}{L_i}\right) = \int_{T_0}^{T} \alpha(T)dT \ \ (11)$$

Finalmente, utilizando a propriedade dos logaritmos que diz ser o logaritmando igual à base elevado ao logaritmo e passando o comprimento inicial para o lado direito da igualdade, tem-se a equação 12:

$$\boldsymbol{L_f = L_i e^{\int_{T_0}^{T} \alpha(T)dT}} \ (12)$$

A equação 12 é a expressão matemática mais geral para a dilatação linear. Seguindo a mesma linha de raciocínio, poder-se-ia deduzir as expressões matemáticas mais gerais para as dilatações superficiais e volumétricas e que são análogas a obtida para o caso linear.

Ao apresentar a equação 12 pela professora que ministrou o curso, um aluno questiona se o coeficiente não é sempre constante, afinal existem até tabelas que trazem os valores. Foi explicado então que os valores que são mostrados em tabelas são basicamente valores médios em uma determinada faixa de temperatura.

Caso o α não possa ser expresso em função da temperatura, a integral no expoente da equação 12 pode ser desdobrada como uma soma de produtos entre todos os coeficientes de dilatação linear e todas as variações pequenas de temperatura como analogia ao que propõem Vidal et al (2020) nos enunciados escritos que deveriam aparecer em livros de Física para auxiliar a compreensão de integrais, isto é:

$$\int \alpha \mathrm{dT} = \alpha_1 \mathrm{d}T_1 + \alpha_2 \mathrm{d}T_2 + \alpha_3 \mathrm{d}T_3 + \cdots + \alpha_n \mathrm{d}T_n \ (13)$$

Caso na equação de número 12, o coeficiente de dilatação for constante com a temperatura, este sai da integral e a expressão para o cálculo do tamanho final passa a ser:

$$\mathbf{L_f} = \mathbf{L_i e^{\alpha \Delta T}} \ (14)$$

Há na matemática financeira uma expressão análoga a esta equação 14 na capitalização em regime contínuo onde montante (M) é igual ao capital (C) multiplicado pela base neperiana elevada ao produto entre a taxa de juros (i) e o tempo (n), ou seja:

$$M = Ce^{in} (15)$$

Assim, pode-se se supor naturalmente que equação 15 não assume seu caráter mais geral possível, pois as taxas de capitalização podem variar muito rapidamente no tempo. Por analogia ao que se mostra na equação 7, pode-se supor que a expressão mais geral para a capitalização contínua é a equação 16:

$$M = Ce^{\int_{n_0}^{n} i(n) dn} \ (16)$$

Considerando que em livros de Física de Ensino superior já não aparece a equação 12 para a dilatação (a mais geral), não é de se espantar que também não apareça a equação 16 na matemática financeira.

Se o produto entre o coeficiente e a variação de temperatura é tipicamente menor ou igual a 0,1; pode-se usar a aproximação de Taylor que afirma que $e^x \approx 1 + x$, pois a variação do valor obtido na prática em relação ao valor real é inferior a 1%. Então tem-se a equação 17 que sempre aparece em livros didáticos de Ensino Médio e Ensino superior:

$$\mathbf{L_f = L_i(1 + \alpha\Delta T)} \ (17)$$

Aplicando a mesma ideia à equação 15, obtém-se a fórmula para de montante para juros simples mostrada na equação 18:

$$M = C(1 + in) \ (18)$$

Após a explanação sobre a variação infinitesimal, foi aplicado um teste qualitativo para saber se os alunos conseguiram entender sob que circunstâncias seria aplicada cada formulação. A seguir, o referido teste contendo as cinco questões qualitativas respondido em 23 minutos:

*Teste Qualitativo de Compreensão da Dilatação*

*1. Considerando as 3 formas que podem se apresentar a equação geral de dilatação, qual delas é a forma mais geral de calcular a dilatação?*

*a) Exponencial com integral; b) Exponencial sem integral;*

*c) Sem a função exponencial d) Não existe uma formulação mais geral*

*2. Se estivermos diante de um problema de dilatação em que o coeficiente de dilatação é constante com a temperatura, qual (is) as formulações poderiam ser utilizadas no cálculo?*

*a) Somente a Exponencial com integral b) Somente a Exponencial sem integral;*

*c) Exponencial com integral ou Exponencial sem integral d) Somente a Linear;*

*3. Se estivermos diante de um problema de dilatação em que o coeficiente de dilatação varia com a temperatura, qual (is) da (s) formulação (ções) poderia (m) ser utilizada (s) no cálculo?*

*a) Somente a Exponencial com integral; b) Exponencial sem integral e linear;*

*c) Linear e Exponencial com integral; d) N.D.A*

*4. Se estivermos diante de um problema de dilatação em que o coeficiente de dilatação constante com a temperatura e o produto entre este e a variação de temperatura é maior do que 0,1; qual (is) da (s) formulação (ções) poderia (m) ser utilizada (s) no cálculo?*

*a) Exponencial com integral e Exponencial sem integral;*

*b) Somente a Exponencial sem integral; c) Somente a Linear; d) N.D.A*

*5. Se estivermos diante de um problema de dilatação em que o coeficiente de dilatação é constante com a temperatura e o produto entre este e a variação de temperatura é menor ou igual a 0,1; qual (is) da (s) formulação (ções) poderia (m) ser utilizada (s) no cálculo?*

*a) Somente a Exponencial com integral; b) Somente a Exponencial sem integral;*

*c) Somente a Linear; d) N.D.A*

## Resultados

Na tabela 1, apresentam-se os resultados do Teste de Sondagem Matemática no que diz respeito ao total de acertos dos discentes. Doze dos dezenove alunos (cerca de 63%) não obtiveram êxito na resolução correta do teste de pelo menos metade das questões (acertaram no máximo 2 questões). Cerca de 43% (9 alunos) não conseguiram acertar absolutamente nada. Houve ainda 2 alunos (10,5% aproximadamente) que acertaram todos os itens propostos.

**Tabela 1-** Quantidade de Alunos que acertaram uma determinada quantidade de questões no teste de sondagem matemática.

| Número de Acertos | Número de alunos |
|---|---|
| 0 | 9 |
| 1 | 0 |
| 2 | 3 |
| 3 | 1 |
| 4 | 4 |
| 5 | 2 |

Analisando-se a tabela 2, que faz referência ao número de acertos por questão do Teste de Sondagem Matemática.

Observa-se que a questão de número 1a teve cerca de 52,6% de acerto; a questão de número 1b teve 47,4% aproximadamente de acerto; a questão 1c teve aproximadamente 21% de acerto; a questão 2 teve 36,8% dos alunos conseguindo acertar e por fim, a questão 3 apenas 15,8% acertaram. Ainda segundo a tabela 2, o item mais fácil na visão dos alunos foi o 1a (integral do infinitesimal) com 10 acertos e o mais difícil, o 3 (aproximação da base neperiana elevada a um número pequeno em comparação com a unidade) com 2 acertos apenas.

Em relação às maiores dificuldades, muitos não lembravam da integral do inverso de x, bem como também não sabiam calcular a aproximação da base neperiana elevada a um expoente pequeno em comparação a 1. Embora esta última tivesse sido explicitada no próprio teste, o que supõe a desatenção neste item.

**Tabela 2 –** Quantidade de acertos por questão no teste de sondagem matemática.

| Número da Questão | Quantidade de Alunos que Acertaram |
|---|---|
| 1a | 10 |
| 1b | 9 |
| 1c | 4 |
| 2 | 7 |
| 3 | 2 |

Na tabela 3, tem-se a quantidade de alunos que acertaram uma determinada quantidade de questões no Teste Qualitativo de Compreensão da Dilatação.

Nenhum dos alunos obteve insucesso completo; três alunos acertaram apenas uma questão; o mesmo número de alunos anterior acertou apenas duas questões; a grande maioria deles (11 ao todo) acertaram três questões; apenas um aluno respondeu corretamente quatro questões e nenhum deles acertou o teste completo.

De qualquer forma, como aspecto positivo se observa que doze dos dezoito alunos (66,7% aproximadamente) obtiveram êxito na maioria das questões, ou seja, acertaram pelo menos três questões.

**Tabela 3 -** Quantidade de Alunos que acertaram uma determinada quantidade de questões no Teste Qualitativo de Diltação.

| Número de Acertos | Número de alunos |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 3 |
| 2 | 3 |
| 3 | 11 |
| 4 | 1 |
| 5 | 0 |

A tabela 4 apresenta, por sua vez, a quantidade de alunos que acertou cada uma das questões no Teste Qualitativo de Compreensão da Dilatação. Percebe-se claramente que eles sentiram maior facilidade nas questões de número 1 e 2, pois catorze dos dezoito (aproximadamente 77,8%) responderam-nas corretamente.

Ainda se percebe pela apresentação dos dados na mesma tabela que treze dos dezoito alunos (cerca de 72,2%) responderam corretamente à questão 3. A questão de número quatro foi acertada por cerca de 27,8% dos alunos (um total de 5) e finalmente nenhum dos discentes obteve êxito de 100% na resolução de todas as questões propostas.

**Tabela 4** – Quantidade de acertos por questão no Teste Qualitativo de Dilatação.

| Número da Questão | Quantidade de Alunos que Acertaram |
|---|---|
| 1 | 14 |
| 2 | 14 |
| 3 | 13 |
| 4 | 5 |
| 5 | 0 |

## Considerações Finais

Pode-se ver por este artigo o resultado da compreensão qualitativa dos estudantes após ser ministrada uma aula de dilatação linear a partir de considerações a respeito de variações infinitesimais. Também foi possível ver o que eles lembravam do semestre anterior da primeira disciplina de cálculo.

Embora o foco da aula tenha sido em dilatação linear, a compreensão do caso superficial e volumétrico são completamente análogos. Assim, tem-se basicamente a variável comprimento final substituída por área final ou volume final; a variável comprimento inicial é trocada pela variável área inicial ou volume inicial e por fim, a incógnita coeficiente de dilatação linear é substituída por coeficiente de dilatação superficial ou volumétrico conforme o caso.

Telles e Netto (2013, p. 253), Mors (2016) e Resnick et al (2003, p.222) sugerem que a dilatação linear (ΔL) pode ser calculada pela integral $\int L_0\, \alpha(T) dT$. Nenhum dos autores mencionados, entretanto, explicam o porquê desta possibilidade. Para entender é necessário apenas considerar que o expoente da equação 12 é muito menor que 1 e aplicar a aproximação de Taylor.

Durante a aula, procurou-se estabelecer uma analogia matemática do conceito das variações infinitesimais em matemática financeira com a dilatação térmica, pois quanto maiores associações alguém pode fazer a respeito de um conceito, acredita-se estar mais próximo de se aprender significativamente o conceito.

Por fim, cabe ressaltar como de fundamental importância o papel docente no tocante à organização do aprendizado, no domínio de conteúdo e na interação estabelecida com o discente no processo de aprendizado. Afinal de contas, se a equação de dilatação variando exponencialmente com a temperatura não aparece em livro algum de Física, acredita-se como altamente improvável a compreensão por parte do aluno deste fato.

**Referências Bibliográficas**

BAUER, W.; WESTFALL, G.D.; DIAS, H. Física para Universitários: Eletricidade e Magnetismo. AMGH Editora Ltda, Porto Alegre, 2012.

CUNHA, M. I. “Ensino com Pesquisa: a Prática do Professor Universitário”. Cad. Pesq. São Paulo, n.97, pg 31-46, maio de 1996.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. Fundamentos de Matemática Elementar vol 2. Editora Atual, São Paulo, 1977.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; TEIXEIRA, J.C.; MACHADO, N. J.; GOULART, M.C.; CASTRO, L.R.S.; MACHADO, A.S. “Matemática: 3ª Série do Segundo Grau” Atual Editora LTDA, São Paulo 1979.

MORS, P. M. Dilatação Térmica: Uma abordagem matemática em física básica universitária. Revista Brasileira de Física, vol 38, n° 1, 1701 (2016).

MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J. Cálculo: volume, 1. Editora LTC, Rio de Janeiro, 1982.

RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; KRANE, K.S. Física 2. Quinta Edição, Editora LTC, Rio de Janeiro, 2003.

RYAN, M. Cálculo para Leigos. 2ª edição, Ed. Alta Books, Rio de Janeiro, 2009.

TELLES, D. D.; NETTO, J. M. Física com Aplicação Tecnológica: Oscilações, Ondas, Fluidos e Termodinâmica. Editora Blucher, São Paulo, 2013.

VIDAL, L. A.; CUNHA, C. R.; TAVARES, A. S. Ajudando a elucidar o significado físico-matemático de integrais para estudantes de engenharia em um minicurso com o auxílio de enunciados. Revista EENCI, volume 15, número 3, 2020;