UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS ENVOLVENDO FRACTAIS

An investigation on mathematical reasoning in exploratory activities involving fractals

Cintia Aparecida Bodnar Cordeiro [cintiacordeiro2016@hotmail.com]
Izalene Klipe [izalene@ymail.com]
Iziane Lais Rodrigues Nunes [izilaisrnunes@gmail.com]
Lilian Carla Czuy [lilianczuy222@gmail.com]
Marcio André Martins [mandre@unicentro.br]
Universidade Estadual do Centro-Oeste
Rua: Simeão Camargo Varela de Sã, 03, Vila Carli, Campus Universitário Cedeteg, 85040-080

Recebido em: 02/08/2021
Aceito em: 02/02/2022

Resumo

O raciocínio matemático requer capacidades que vão desde a formulação das situações-problema a sua resolução e justificação. Neste sentido, é importante conhecer os conceitos de raciocínio indutivo, abdutivo e dedutivo, bem como os processos associados. Nesta perspectiva, este estudo busca analisar os tipos e processos de raciocínio movidos por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental durante o desenvolvimento de atividades exploratórias abrangendo a Geometria Fractal. O método adotado segue os preceitos da pesquisa qualitativa e interpretativa em educação, utilizando diversos instrumentos de coleta de dados. Os resultados indicam a ocorrência dos processos de conjecturar, generalizar e justificar em consonância com a abdução, a indução e a dedução.

Palavras-chave: Ensino Exploratório; Geometria Não-Euclidiana; Processos de Raciocínio.

Abstract

Mathematical reasoning requires skills ranging from the formulation of problem situations to their resolution and justification. In this sense, it is important to know the concepts of inductive, abductive and deductive reasoning, as well as the associated processes. In this perspective, this study seeks to analyze the types and processes of reasoning moved by students in the 5th year of Elementary School during the development of exploratory activities covering Fractal Geometry. The method adopted follows the precepts of qualitative and interpretive research in education, using various data collection instruments. The results indicate the occurrence of the processes of conjecturing, generalizing and justifying in line with abduction, induction and deduction.

Keywords: Exploratory Teaching; Non-Euclidean Geometry; Reasoning Processes.

1 Introdução

A Geometria Fractal é conhecida como a geometria da natureza e foi criada por Benoit Mandelbrot, a partir da palavra do latim *fractus* que significa irregular ou quebrado, pois descreve as formas irregulares e quase aleatórias de muitos dos padrões da natureza, e tem como propriedade a autossimilaridade, a complexidade infinita e a irregularidade. Entretanto, constitui um tema recente para muitos professores de Matemática, que em sua formação inicial não estudaram o tema, além disso, há de se considerar que os materiais didáticos e as orientações metodológicas não evidenciam o trabalho com as geometrias não-euclidianas. Conforme as orientações curriculares,

> a Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência (Brasil, 2018, p. 273).

As abordagens em sala de aula a partir de fractais podem contribuir com o desenvolvimento das capacidades de conjecturar, generalizar e justificar, que são processos inerentes ao Raciocínio Matemático (Ponte, Quaresma & Pereira, 2020, p. 10). Neste contexto, o ensino exploratório segundo Stein et al. (2008) caracteriza uma alternativa potencial à prática pedagógica.

O ensino exploratório permite que os estudantes aprendam a partir do trabalho comprometido que realizam com atividades instigantes que são sistematizadas em um trabalho autônomo e em discussão coletiva. Os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgirem com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades como o Raciocínio Matemático. Entretanto, para que isto ocorra, é importante o papel e a ação do professor, que começa com a escolha criteriosa da atividade, interpretação e compreensão de como os estudantes resolvem a atividade. Além disso, é importante a forma que o professor explora as respostas dos alunos de modo a aproximar e articular as suas ideias com aquilo que é esperado que aprendam (Stein et al., 2008).

Sob esta perspectiva, neste trabalho desenvolvemos uma experiência de ensino considerando como objetivo analisar os tipos e processos de raciocínio movidos por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental durante o desenvolvimento de atividades exploratórias abrangendo a Geometria Fractal. A base teórica utilizada contempla aspectos sobre a capacidade de raciocínio, notadamente no levantamento de hipóteses, na argumentação e na conclusão. Os resultados obtidos permitem compreender as estratégias dos estudantes no contexto do ensino exploratório.

2 SOBRE O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) admite que "as competências e habilidades de raciocinar, comunicar e argumentar matematicamente favorecem o estabelecimento de conjecturas, formulação e resolução de problemas" (Brasil, 2017, p. 268) e o reconhecimento desses conhecimentos pelos alunos são relevantes para "compreensão e atuação no mundo" (Brasil, 2017, p. 268), sendo esse aspecto necessário para o "desenvolvimento do raciocínio lógico, estimulando a investigação" (Brasil, 2017, p. 268).

Desta forma, o desenvolvimento do raciocínio em matemática é proeminente para o ensino e para a aprendizagem. Para tanto, é necessário compreender o que caracteriza o Raciocínio Matemático, isto é, os tipos e processos bem como o seu desenvolvimento.

Ponte, Quaresma & Pereira (2020), em consonância com Rivera & Becker (2009), salientam que “os alunos devem aprender a raciocinar dedutivamente em Matemática mas devem igualmente aprender a raciocinar indutiva e abdutivamente”. O Raciocínio Matemático pode ser tipificado como: Abdutivo, Indutivo e Dedutivo. Há referência ao raciocínio lógico, o qual se caracteriza pela inferência de premissas de forma lógica e coerente. No que diz respeito aos tipos de raciocínios dedutivo e indutivo, os autores Santos et al. (2020) indicam que

> o raciocínio dedutivo leva a conclusões que são necessariamente verdadeiras com base em um conjunto de premissas. Na matemática, está intimamente associado à abstração, formalização e axiomatização (Davis & Hersh, 1986). O raciocínio indutivo, por outro lado, leva a tirar conclusões, fazer afirmaçõessustentadas sobre os casos devidamente observados, quanto ao que pode ser alegado ou refutado em relação a outros casos da mesma natureza (Santos et al., 2020, p. 2).

Santos et al. (2017) também apontam que “a formulação de conjecturas geralmenteocorre por meio do raciocínio indutivo ou abdutivo”. De acordo com Ponte, Quaresma & Pereira (2020) “o fato insólito ou invulgar para o qual uma conjectura (raciocínio abdutivo), pode levar à identificação de casos particulares que permitem a observação de uma regra geral (raciocínio indutivo)”. Com isso, a abdução e a indução são complementares.

Por sua vez, o Raciocínio Dedutivo está relacionado à justificação de premissas com base no encadeamento lógico; pelo Raciocínio Indutivo que remete à elaboração de conclusões com base na observação. Já o Raciocínio Abdutivo se caracteriza pela formulação de conjecturas. Assim, segundo Ponte, Quaresma & Pereira (2020) os processos fundamentais de Raciocínio Matemático são: Conjecturar, Generalizar e Justificar as Vertentes fundamentais do raciocínio em Matemática são as conjeturas (obtidas por raciocínio abdutivo), as generalizações (obtidas na sua maioria de forma indutiva e abdutiva) e as justificações (alicerce do raciocínio dedutivo)(Ponte, Quaresma & Pereira, 2020, p. 11).

Neste trabalho, a análise dos processos de Raciocínio Matemático condiz com o Quadro1.

Quadro 1 - Tipos e Processos de Raciocínio Matemático
Fonte: Adaptado de Ponte, Quaresma & Pereira (2020, p. 10)

<table>
<tr><th>TIPO DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO</th><th>PROCESSOS DE RACIOCÍNIO</th><th>PODEM TER POR BASE</th><th>PODE ASSUMIR FORMAS COMO</th></tr>
<tr><td>Indução/
Abdução</td><td>Conjecturar</td><td rowspan="2">Observação
Construção

Transformação do conhecimento prévio

Combinação de observação, construção e transformação.</td><td>Identificar uma possível solução para o problema

Formular uma estratégia para resolver um problema</td></tr>
<tr><td>Indução</td><td>Generalizar</td><td>Reconhecer um padrão ou uma propriedade comum a um conjunto de objetos

Alargar o domínio de validade de uma propriedade a um conjunto mais alargado de objetos</td></tr>
</table>

Dedução	Justificar	Definições Axiomas, propriedades, princípios gerais Representações Combinações de definições, propriedades e representações	Coerência lógica Uso de exemplos genéricos Uso de contraexemplos Por exaustão Por absurdo

2.1 A Geometria Fractal

Por muitos anos a Geometria Euclidiana foi apontada como a geometria que melhor descreve o mundo em que vivemos, mas, ao longo dos anos surgiram várias inquietações sobre a validade desse fato. Notou-se uma necessidade de aprofundamento de estudos. Benoit Mandelbrot em 1948 dedicou-se ao estudo da Geometria Fractal assando a vislumbrar aplicações em diversas áreas, dando ênfase ao estudo do Conjunto de Cantor. Dessa forma,

> na IBM deparou-se com questões de ruídos nas linhas telefônicas utilizadas em rede entre os computadores. Mandelbrot soube dos engenheiros que algum ruído não podia ser eliminado e interferia nos sinais; a aleatoriedade e a irregularidade dos ruídos afastavam os engenheiros da busca de soluções. Resolveu o problema empregando um trabalho de Georg Cantor chamado Poeira de Cantor (Barbosa, 2005, p. 11).

Neste contexto, quando verificamos que existem formas na natureza que não são regulares como na estrutura do flocos de neves, em mariscos, na linha da costa de uma região, nas árvores, nuvens e relâmpagos, ocorre a necessidade de utilizarmos a Geometria Fractal, conhecida também da ciência do caos "assim a estrutura fragmentada do fractal fornece certaordem ao caos e busca padrões dentro de um sistema por vezes aparentemente aleatório" (Barbosa, 2005, p. 10).

Os fractais são caracterizados por repetir um determinado padrão, possibilitando assim importantes características: a autossimilaridade, dimensionalidade e a complexidade infinita. Retomando-os, respectivamente, são eles:

> autossimilaridade: Ao tomarmos um trecho do fractal, percebemos que tal trecho é semelhante ao fractal, apenas com uma redução na escala, do tamanho original. Esta característica permanece em qualquer nível de construção do fractal; Estrutura fina: O grau de detalhamento de um fractal não diminui se examinarmos uma porção arbitrariamente pequena do mesmo. O fractal possui detalhes em partes tão pequenas como possamos imaginar; Simplicidade da lei de formação: o alto grau de detalhamento e a complexidade da estrutura de um fractal não impedem que sejam formados por processos simples. Assim é possível construirmos fractais, aplicando algoritmos (Borssoi, 2005, p. 11).

Ao abordar os fractais em sala de aula o professor está contemplando as orientações de vários documentos que norteiam o ensino da Geometria na Educação Básica com a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017). Isto, tendo em vista que as "atividades envolvendo fractais possibilitam ao aluno o desenvolvimento do raciocínio - lógico matemático, a integração entre conceitos matemáticos e elementos do cotidiano, desenvolvimento do senso estético, criatividade, entre outras habilidades" (Colucci & Valim, 2008, p. 49).

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho considera uma experiência no contexto do ensino exploratório segundo Stein et al. (2008) com três turmas de alunos da rede municipal de ensino de Guarapuava-PR, matriculados em um projeto de educação complementar, o qual visa promover a educação integral em uma parceria público-privada, durante o contraturno. A partir das convicções do projeto de educação complementar, são desenvolvidas ações sistemáticas e oficinas pontuais nos eixos Letramento, Raciocínio Lógico, Arte-Educação e/ou Expressão Corporal para as crianças e adolescentes matriculados no Ensino Fundamental e Médio da rede estadual e municipal de ensino e instituições educacionais. A curiosidade, as necessidades e o contexto no qual os alunos estão inseridos são o ponto de partida para o desenvolvimento dinâmico e lúdico dessas ações.

Cada turma era composta por 20 alunos, com idade entre 9 e 11 anos, oriundos respectivamente das escolas aqui denominadas A, B e C, totalizando 60 crianças no estudo, sendo 28 meninas e 32 meninos, de nível socioeconômico de até três saláriosmínimos. Para manter o anonimato dos alunos, neste texto utilizaremos os símbolos A1, A2,..., A20 para nos referirmos aos alunos da escola A; os alunos da escola B serão representados por B1, B2,.., B20 e finalmente os alunos da escola C serão representados por C1,C2,.., C20. Em cada turma foram realizados três encontros de 4h, que ocorreram remotamente, por meio da plataforma *Microsoft Teams*, ministrados pela professora regente e uma das autoras do presente artigo.

As quatro atividades foram desenvolvidas de acordo com a aula em três fases (Ponte, Quaresma & Pereira, 2020), sendo a primeira fase o lançamento da atividade, a segunda o trabalho autônomo e por último a fase da discussão coletiva. Na primeira fase, deve-se assegurar o entendimento dos alunos com relação ao enunciado e termos matemáticos presentes na atividade. Durante o trabalho autônomo, a professora regente acompanha a resolução da atividade, promovendo intervenções quando necessário, a fim de instigar os alunos. Na discussão coletiva são incentivadas interações de modo a valorizar tanto as respostas corretas quanto as incorretas, levando os estudantes a refletirem sobre seus processos de raciocínios.

A pesquisa desenvolvida junto aos estudantes possui caráter qualitativo e interpretativo (Fiorentini & Lorenzato, 2012, p. 66), visto que este método se caracteriza pela interação entre pesquisadores e membros das situações investigadas, ou seja, no caso específico os alunos passam a ser sujeitos e deixam de ser o objeto da pesquisa. Foram desenvolvidas quatro atividades investigativas, a saber: (i) a observação de uma imagem de um exemplo de fractal na natureza; (ii) a construção da Poeira de Cantor; (iii) a construção do Triângulo de Sierpinski; e, (iv) a análise do triângulo de Pascal e sua relação com fractais, com base em princípios gerais e específicos. Para a recolha de dados foram utilizados os seguintes instrumentos: gravação de aula, questionário elaborado no *Socrative*, fotos das atividades e anotações em diário de bordo. A análise dos dados ocorreu de acordo com os elementos dispostos no Quadro 1.

Os resultados correspondem ao desenvolvimento de quatro atividades de cunho exploratório, respeitando alguns princípios gerais e específicos. Foi considerado como princípios gerais incluir: g1) questões que permitem uma variedade de estratégias de resolução; g2) questões que envolvem uma variedade de representações; e g3) questões que incentivem e favoreçam a reflexão sobre os processos de raciocínio utilizados. Como princípios específicos também foi considerado incluir: e1) questões que incentivem a formulação de generalizações baseadas na observação; e2) questões que incentivem a formulação de generalizações baseadas na construção; e3) questões que incentivem a formulação de generalizações por transformação do conhecimento prévio; e4) questõesque solicitem ou incentivem a justificação de respostas, ou de estratégias de resolução, ou de afirmações matemáticas; e5) questões que solicitem ou incentivem justificações de natureza diversa, nomeadamente, com base na coerência lógica, com recurso a exemplos genéricos ou contra exemplos, por exaustão ou absurdo e, por fim, e6) questões que incentivem o estabelecimento de uma organização de objetos com base na identificação de características desses objetos.

Os resultados foram obtidos a partir de relações estabelecidas entre os Tipos e Processos de Raciocínio Matemático (Quadro 1), as manifestações dos estudantes e as percepções da professora regente. Buscou-se assim, durante a experiência de ensino, uma perspectiva de triangulação.

3.1 Atividade 1 – Fractais e a Natureza

A atividade 1 considera como conhecimento prévio dos estudantes os conceitos de sequências e regularidades, consistiu na observação de uma imagem de um exemplo de fractal na natureza, e, teve como princípios g3, e1 e e8. Trata-se do estudo de fractais presentes na natureza, e traz como contributo a compreensão da propriedade de autossimilaridade que podeser entendida como uma transformação de escalas, ampliação ou redução, mantendo-se a forma e estrutura. No caso de determinadas plantas, pode-se encontrar certa semelhança entre as folhas que constituem um pequeno ramo com outros ramosmaiores, e que assim sucessivamente irão gerar uma planta, que não é muito diferente da parte inicial. A motivação para a criação desta atividade foi inspirada na contextualização da matemática e da natureza, considerando que a samambaia é uma planta típica da região e muito conhecida entre as famílias dos estudantes. A execução da atividade consistiu em um encontro de duas horas.

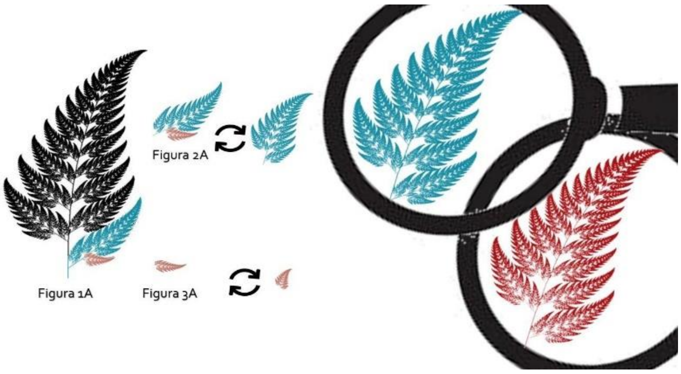


Figura 1: Representação do todo e das partes da samambaia
Fonte: Arquivo dos autores

A partir do diário de bordo, foram escolhidos alguns excertos, por serem representativos das expressões mais elaboradas dos estudantes, de modo geral, envolvendo as escolas A, B e C, permitindo assim uma análise. A execução da atividade ocorreu de modo semelhante nas três escolas, entretanto, na escola A, os estudantes tiveram maior desenvoltura durante a discussão coletiva. Durante o lançamento da atividade, foram lançadas as questões 1, 2 e 3, e no trabalho autônomo, após discussões coletivas, os estudantes responderam. Algumas respostas que ilustram as expressões dos estudantes estão dispostas nos quadros 2, 3 e 4, assim como as questões abordadas.

Quadro 2: Enunciado da questão 1 da atividade 1 e resposta apresentada por A3.
Fonte: Arquivo dos autores

Questão 1: O que você observa em relação às figuras 1A, 2A e 3A?
A3: *[...] a figura 1A é representada por ela mesma e a figura 3A é a mesma que a figura 1A só que menor, a mesma coisa com a 2A, a mesma que a figura 1A só que menor, ou seja, é uma samambaia que é feita por samambaia, que é feita por samambaia, que é feita por samambaia que é feita por samambaia [sic].*

Pela resposta pode-se observar que a manifestação de A3 assumiu a forma de reconhecimento de um padrão ou de uma propriedade, no caso específico da autossimilaridade, tendo como base a observação ao mencionar que as três figuras são iguais, ou seja, uma samambaia que é feita por samambaia e sucessivamente. Pode-se considerar que A3 generalizou, ou seja, formulou conjecturas de natureza geral, que é um processo-chave dos raciocínios indutivose abdutivos. Os demais alunos apenas formularam conjecturas específicas em suas respostas, como se observa abaixo:

Quadro 3: Enunciado da questão 2 da atividade 1 e resposta apresentada por A3 e A1.
Fonte: Arquivo dos autores

Questão 2: Como seria a próxima figura?
A3: […] você tem uma folha que é feita de outra folha, então se perseguir essa lógica ela vai ser igual feita por outras folhas que são feitas de outras folhas e de outras folhas e assim vai infinitamente porque os números são infinitos, ou seja, elas são iguais a única diferença é que ela vai mudando de tamanho mesmo [sic]. *A1:[…] Ela seria menor do que a figura 3A. Porque é da maior para a menor, daí tem a média, a figura 3A que é pequena e daí que vai ser a miudinha que é a 4A [sic].*

Considerando-se a resposta de A3, percebe-se a ocorrência de certo nível de reconhecimento de padrão por meio de uma identificação de uma propriedade comum a um conjunto de objetos, tomando como base a observação. O estudante formulou uma conjectura de natureza geral caracterizando o processo de generalização inerente ao raciocínio indutivo.

Quadro 4: Enunciado da questão 3 da atividade 1 e resposta apresentada por A3, C1 e B3.
Fonte: Arquivo dos autores

Questão 3: Se você tivesse uma lupa para observar e pudesse repetir o processo, quais seriam as figuras seguintes?
A3: Acontece prof que todas são iguais. É uma folha feita por outra folha, feita por outra folha, vai até sei lá 1146803 se quiser vai fazendo, vai fazendo...porque é uma folha feita de uma folha, feita de uma folha, ou seja, literalmente infinito, a única coisa que vai diminuindo mesmo vai ser o tamanho [sic]. *C1: A figura 4 seria bem pequenininha, porque a gente tinha que tirar do 3. O formato seria o mesmo das outras, mas só que ela iriam menores [sic].* *B3: por exemplo a figura 10 vai ser tirada da 9 e cada vez vai ficando mais pequenininha [sic].*

Durante a experiência, verificou-se que ao menos um aluno de cada escola conseguiu generalizar, uma vez que ao mencionarem que uma folha é feita de outra folha, que vai ficando cada vez menor, que vai diminuindo, nota-se o reconhecimento da propriedade de autossimilaridade e o raciocínio indutivo. Constatou-se que estes estudantes já possuíam noções de semelhanças de objetos e que conseguiram relacionar com padrões regulares. Com a manifestação de A3, na questão 3 (quadro 4), para além da compreensão da regularidade também foi possível referenciar ideia associada ao conceito de infinito.

3.2 Atividade 2 – Poeira de Cantor

A atividade 2 demanda como conhecimentos prévios, dos estudantes, a noções de: divisão e multiplicação; sequências; regularidades e medidas de comprimento. Para a sua execução, foi considerada a construção da Poeira de Cantor. Admitiu-se como princípios: g1, g3, e2, e3, e4 e e6. A representação adotada caracteriza-se pelo desenho de segmentos de reta conforme uma medida inicial, e pela divisão do segmento em três partes, de forma sucessiva em cada nível, descartando o segmentodo meio. Inicialmente, os estudantes foram orientados a construir, utilizando a régua, cada nível (partindo do nível 0), realizando a divisão em três partes, descartando a parte central. A "Poeira de Cantor" consiste em um exemplo clássico das geometrias fractais, porém não é comumente apresentada de maneira exploratória. A atividade foi realizada em um encontro de quatro horas.

No lançamento da atividade, primeiramente, os estudantes construiram os segmentos de reta para compor a Poeira de Cantor, conforme a Figura 2 e, em seguida, no trabalho autônomo, após discussões coletivas, os estudantes responderam as questões de 1 a 7, dispostas nos quadros 5 a 11 respectivamente. Na coleta de informações, constatou-se que os alunos das três escolas A, B e C resolveram a atividade de forma semelhante, conforme representações apresentadas nos quadros 5, 7 e 9.

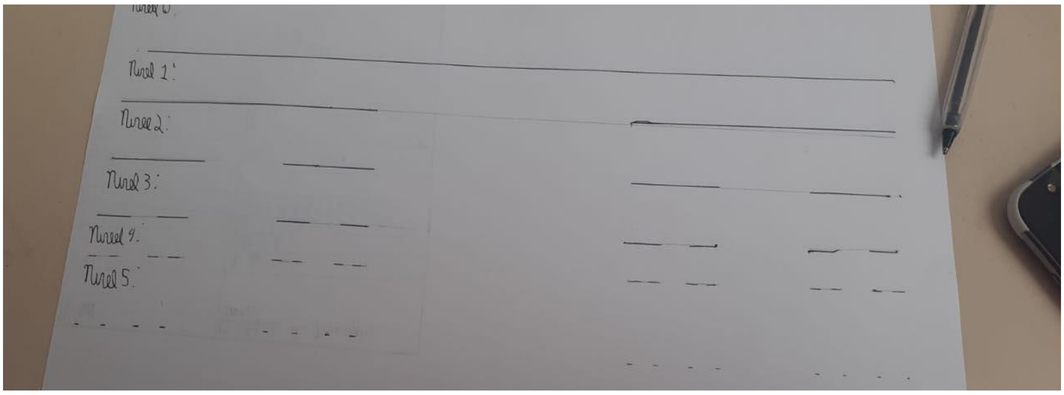


Figura 2: Construção pelo aluno A3 da Poeira de Cantor até o nível 5
Fonte: Arquivo dos autores

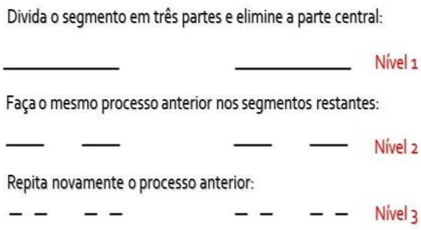
A3 justificou a sua construção até o nível 5, Figura 2, da seguinte maneira: "*Fiz a lógica de dividir em três e apagar o do meio até sobrar 1 milímetro e não mais para fazer na régua por que tinha chegado no limite da régua".* Chegou até a construção limite por meio do instrumento de medição utilizado durante a aula, as ideias do estudante remeteram à recursividade e ao conceito de limite. A professora perguntou aos alunos sobre a quantidade de segmentos construídos, solicitando que preenchessem em uma tabela (Quadro 8), com vistas ao reconhecimento de padrão.

Quadro 5: Enunciado da questão 1 da atividade 2 e respostas apresentadas pelos alunos das escola A. B e C.
Fonte: Arquivo dos autores

1) Quantos segmentos de reta tinham no nível 0? Complete a tabela. Construa um segmento de reta de 27 cm: ________________ Nível 0 níveis | Nº DE SEGMENTOS 0 |	Quase a totalidade dos alunos das escolas A, B e C por meio da observação afirmaram comconvicção que havia um único segmento de reta no nível 0. Apenas A4 confundiu a quantidade de segmentos com a medida e alegou que havia 27 segmentos e C1 complementou a resposta alegando que havia uma reta inteira.

Quadro 6: Enunciado da questão 2 da atividade 2 e respostas apresentadas por B1 e C2.
Fonte: Arquivo dos autores

2) Quantos segmentos de reta tinham no nível 1? e no nível 2? e no nível3? e quais são suas medidas? Complete a tabela.



níveis	Nº DE SEGMENTOS
0	
1	
2	
3	

Os estudantes utilizaram para responder às indagações, e responderam a quantidade de segmentos correta para os níveis 1, 2 e 3, respectivamente 2, 4 e 8 segmentos. Para as medidas em cada nível , seguem algumas respostas representativas das manifestações da maioria dos estudantes:

B1: 9, porque 27 dividido por 3 dá 9 (nível 1) [sic].

C2: três, pq na tabuada do três você vai ver onde que tem o três, depois vai dar um o nível 3 e no nível 2 vai dar 3cm [sic].

B1 e C2, por meio de justificativas, reconheceram a propriedade da divisão por três que está ocorrendo na construção, tendo por base a observação e a construção. C2 conseguiu generalizar a medida do segmento do nível 2 e também a do nível 3, que ainda não havia sido solicitada, ou seja, formulou conjecturas de natureza geral, sendo um processo-chave dos raciocínios indutivo e abdutivo.

Quadro 7: Enunciado da questão 3 da atividade 2 e respostas apresentadas por A3, B1, C1, C2 e A1.
Fonte: Arquivo dos autores

3) Você é capaz de dizer qual a quantidade de segmentos de reta no nível 4 sem desenhar ? Terão qual comprimento? Justifique sua resposta. Complete a tabela.

níveis	Nº DE SEGMENTOS
0	
1	
2	
3	
4	

A3: Eu sei segmentos, segmentos são 24. Porque seguindo a lógica dos outros do nível 1 ... pro nível dois, o número de linhas que tem vezes o três... No (nível) 3 ali tem oito vezes três, já que cada um vai virar 3, então vai virar 8 vezes o 3 e vai dar 24[sic].

B1:16, porque ali na tabela tá 1, daí depois do um vem o dois, 1+1 dois, 2+2 quatro, quéé a do dois, 4+4 oito e 8+8 dá 16[sic].

C1: O segmento de retas é 16. Se cortar a linha ao meio que fica 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 (contou aos pares de segmentos) [sic].

C2: O professora, agora eu entendi, porque daí tem oito pedacinhos, daí você vai dividir esses pedacinhos e vai ficar 16 [sic].

A1: Prof mas daí vai ficar zero, porque não tem como dividir um. (se referindo à medida do segmento) [sic].

Na questão 3 os alunos das escolas A, B e C conjecturaram, por meio da observação e construção de maneiras distintas umas das outras, conforme as respostas apresentadas no quadro 7, e chegaram à mesma resposta final. A3 ao ser indagado pela professora se havia eliminado no decorrer dos níveis o segmento central prontamente respondeu: "*Vai dar 16!*". B1 percebeu um padrão ao analisar as respostas preenchidas em sua tabela e, mesmo sem desenhar, concluiu que resultaria 16 segmentos no nível 4. Percebe-se a manifestação sobre a capacidade de generalizar com base na observação e na construção. C1 observou o nível 3, anteriormente, e eliminou cada segmento ao meio e contou os pares chegando ao 16, entretanto, fez isso mentalmente, ou seja, sem a representação gráfica. C2 fez uma análise similar, explicando de uma forma diferente como chegou a resposta 16, utilizando mentalmente a operação de divisão. A1 afirmou que não há como dividir 1cm em 3 partes, para descobrir qual seria a medida de cada segmento do nível 4. Percebe-se aqui uma certa incompreensão relacionada às operações com números racionais, bem como aos conceitos associados.

Quadro 8: Enunciado da questão 4 da atividade 2 e respostas apresentadas por B1, A1 e A3.
Fonte: Arquivo dos autores

4) Complete o restante da tabela (nível 5, 6 e 7). Analise o que está ocorrendo.

níveis	Nº DE SEGMENTOS
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

B1: posso tentar falar o meu? eu acho que consegui fazer o nível 5, o seis e o 7. Assim, eu acho que no nível 5 vai dar 32, no 6 : 64 e no 7: 128. Porque eu tava fazendo a mesma lógica que fiz antes do 1 que eu contei 1+1:2, 2+2:4, 4+4:8; 8+8:16; 16+16:32; 32+32: 64; 64+64:128 [sic].

A1: Tá dobrando [sic].

A3: Eu tava tentando achar a lógica de porque dobrava e eu achei. Imagine assim você tem várias linhas, vamos contar que é oito aqui do nível 3. Agora em vez de você separar essa linha em três pra cortar o meio,você só colocar um do lado daí juntar, só colocar um do lado de cada linha. vai ficar na mesma porque agora você só colocou umae aqui na linha prof que você disse a gente colocou duas e eliminou uma, ou seja a gente adicionou uma. Adicionando uma a cada umvai ficar o dobro. Eu peguei aqui do outro lado da folha e fiz vários riscos e fui só colocando uma do lado e deu na mesma [sic].

Conforme quadro 8, B1 reconheceu o padrão no decorrer dos níveis usando como base a observação e a construção, Portanto generalizou, ou seja, formulou conjecturas de natureza geral. Além disso, buscou justificar sua resposta por meio de representações matemáticas com operações de adição e conceitos de dobro. A1 percebeu que no decorrer dos níveis o número de segmentos estava dobrando e A3 tentou entender o motivo para isso. Pela resposta dada pode-se considerar que A3 também reconheceu um padrão com base na observação e na construção, formulando conjecturas de natureza geral, generalizando, que é um processo chave dos raciocínios indutivos e abdutivos.

Quadro 9: Enunciado da questão 5 da atividade 2 e respostas apresentadas por A1, A2, B1 e C2.
Fonte: Arquivo dos autores

5) Para um nível qualquer n, é possível se descobrir a quantidade de segmentos dereta? Quantos segmentos há? Justifique sua resposta.	*A1: É possível, é só você ir dobrando [sic].* *A2: Dá pra fazer o nível (quantidade de segmentos anteriores) antes vezes dois [sic].* *B1: O prof, seria um pouco trabalhoso, mas se ir contando do 7 (nível) 128 assim até chegar ao nível 24, por exemplo [sic].* *C2: É possível. Por exemplo no nível 24, a gente ia pegar o resultado do nível 23 e ia fazer o número mais o número e ia dar o 24 [sic].*

Conforme se apreende no quadro 9, os estudantes primeiramente encontraram possibilidades de encontrar o número de segmentos em qualquer nível por meio de uma combinação entre construção, observação e exemplo numérico o que caracteriza o processo de generalização inerente ao raciocínio indutivo. Observou-se a realização de conjecturas, a apresentação de explicações coerentes ao reconhecerem o padrão de formação entre os níveis.

Após esta questão ser respondida pelos estudantes, a professora questionou sobre como poderiam representar o número 4 por meio de uma operação apenas com o número 2, ou seja, quais as operações que poderiam ser obtidas com a resposta 4. De maneira semelhante, questionou operações em que a resposta fosse o número 8, o número 16 e assim sucessivamente. Conforme as respostas de A1 - *"Dá pra fazer por exemplo no nível 22 repetir 22 vezes o dois". "No nível 100 dá pra fazer 100 vezes o dois também"*. Suas explicações apontam um reconhecimento de padrão comum entre os números, por meio de uma combinação de observação e transformação de conhecimento prévio e com o exemplo numérico, o quecaracteriza o processo de generalização inerente ao raciocínio indutivo.

Quadro 10: Enunciado da questão 6 da atividade 2 e respostas apresentadas por A2, A1 e B1.
Fonte: Arquivo dos autores.

6) Conforme formos fazendo mais níveis. a) O que está ocorrendo com o número de segmentos? b) E com o comprimento de cada segmento? Justifique sua resposta.	*a)* *A2:Vai só aumentando o valor [sic].A1: Está dobrando [sic].* *b)* *A1: Ele vai abaixando, porque vai tendo mais linhas e o comprimento vai caindo [sic].* *B1: Porque quanto maior mais, se estiver 1 (nível) maior, quando você vai dividindo em mais pedaços ele fica menor [sic].*

Com base nas respostas apresentadas por A1, A2 e B1 no Quadro 10, a ocorrência de um certo nível de reconhecimento de padrão por meio da identificação de uma possível solução do problema, tomando como base a observação e a construção. Formularam uma estratégia para resolução da atividade, ou seja, formularam uma conjectura, processo associado aos raciocínios abdutivo e indutivo.

Quadro 11: Enunciado da questão 7 da atividade 2 e respostas apresentadas por A1, A2, B1.
Fonte: Arquivo dos autores

7) O que você pode perceber se esse processo continuasse por muitas emuitas vezes?	*A2: Vai aumentando cada vez mais o nível e indo para o infinito [sic].* *A1: As linhas vai ficando muita e o comprimento não vai dar, tipo vai dar 0,1[sic].* *B1: Que os segmentos eles diminuem o tamanho [sic].*

Conforme a resposta apresentada por A2, nota-se um certo nível dereconhecimento de padrão por meio da identificação de uma propriedade comum a um conjunto de objetos, considerando a observação e a construção. O estudante formulou uma conjectura de natureza geral, caracterizando o processo de generalização inerente ao raciocínio indutivo. Já os estudantes A1 e B1 identificaram uma possível solução para o problema também com base na observação e na construção de uma conjectura, inerente aos raciocínios indutivo e abdutivo.

Durante a realização da experiência da aula em três fases, foi possível perceber que os estudantes possuiam entendimento sobre as operações com números naturais, porém, na expressão de A1 na questão 3 – "*Prof mas daí vai ficar zero, pq não tem como dividir um. (se referindo à medida do segmento) [sic]",* verificou-se uma lacuna de aprendizagem em relação aos números decimais e frações como representações de divisão.

3.3 Atividade 3 – Triângulo de Sierpinski

A atividade 3 refere-se à construção do Triângulo de Sierpinski e teve como princípios g1, g3, e2, e3, e4, e5 e e6. O conhecimento prévio para a atividade envolve medidas e unidades de comprimento, propriedade do triângulo equilátero, sequências e regularidades, simetria e operações com números naturais.

O Triângulo de Sierpinski é considerado um fractal clássico. A atividade desenvolvida teve por objetivo que os alunos explorassem o conceito de autossimilaridade exata, com base na observação e na construção, relacionando os triângulos formados a cada nível de recursividade.

A motivação para o desenvolvimento desta atividade corresponde ao potencial ilustrativo de um processo recursivo, além da representatividade, pois o Triângulo de Sierpinski faz parte dos típicos fractais. Dessa forma, foram elaboradas questões exploratórias envolvendo essa temática. O seu desenvolvimento ocorreu em um encontro de quatro horas.

Embora a análise sobre as informações coletadas durante o desenvolvimento desta atividade envolveu um volume significativo de informações, os excertos aqui apresentados são representativos dos principais indicadores identificados em relação ao objetivo da pesquisa em tela. Na fase 1, da aula, os estudantes foram orientados a construir um triângulo equilátero de 20 cm tal construção sendo nominada de nível 0, então foram convidados a responder a seguinte questão: quantos triângulos há no nível 0? Todos responderam por óbvio que havia um triângulo.

Em seguida, os estudantes foram orientados a determinar o ponto médio de cada lado do triângulo, e a ligar os pontos médios formando um novo triângulo, interno. Então, a proposta seguinte consiste em eliminar a área do triângulo, ilustrada por uma cor distinta, sendo destacada, conforme a primeira ilustração da Figura 3, nominada nível 1. A partir disso, a professora questionou: quantos triângulos surgiram no nível 1? Apenas uma aluna das três escolas respondeu que havia dois triângulos, os demais alunos responderam três triângulos. Os entudantes foram então orientados a completar uma tabela conforme ilustrada na figura 13, correlacionando o nível com o número de triângulos. A partir disso, as questões 1 a 4 foram conduzidas, conforme Figuras 12 a 14. Alguns exertos representativos da maioria das respostas apresentadas pelos estudantes são apresentados nestas figuras.

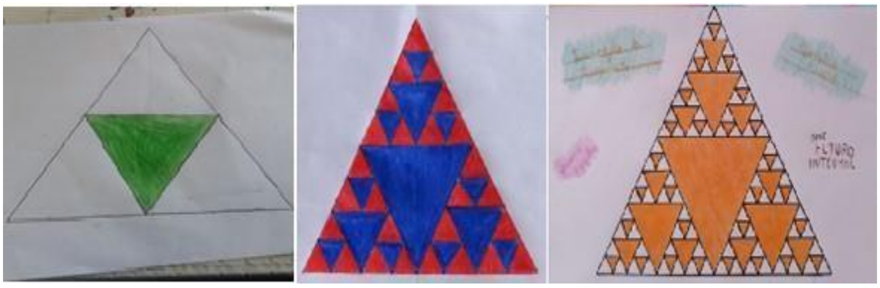


Figura 3: Construção do triângulo de Sierpinski níveis 1, 3 e 4 realizadas respectivamente por A2, B1 e C4
Fonte: Arquivo dos autores.

Quadro 12: Atividade 3 e respostas apresentadas por B1, C3 e A3.
Fonte: Arquivo dos autores

<table>
<tr>
<td>1) Você é capaz de completar toda a tabela sem fazer a construção?

<table>
<tr><th>Níveis</th><th>Triângulos pretos</th></tr>
<tr><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>B1: 81? porque agora eu segui outra lógica, porque eu achei que antes era vezes dois e agora é vezes 3, pq 1×3 é 3, 3×3 é 9, 9×3 é 27 e daí 27×3 dá 81 (nível 4) [sic].

B1: No nível 5: 243 e no nível 6: 729. Porque é a mesma lógica que falei é só você contar 81×3 dá 243 e 243×3 dá 729 [sic].

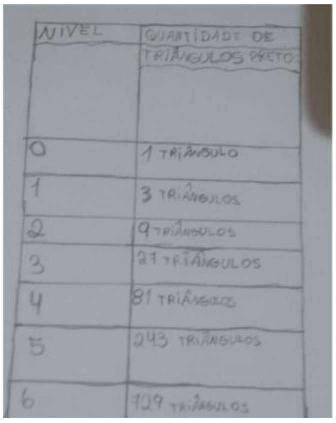
C3: O professora a gente vai fazer 9×3 que vai dar 27 (nível 2 para o nível 3) e dá 81? (nível 4? porque eu acho que 27×3 dá 81 [sic].

C3: vai dar 243 que é 81×3 (nível 5). 729! [sic].</td>
</tr>
<tr>
<td>2) Qual a relação entre a quantidade de triângulos em um nível e a quantidade no nível anterior?</td>
<td>B1: O prof, esses negócio assim eu acho que tem um segredo que é o vezes, não é? [sic].

A3: Podemos perceber que de um nível e o seu anterior está dividindo por 3 [sic].</td>
</tr>
</table>

Nestes itens, considerando-se as respostas de A3, B1 e C3 observa-se o entendimento sobre o reconhecimento de padrão, por meio da identificação de uma propriedade comum a um conjunto de objetos, tomando como base a observação. Formulou-se uma conjectura de natureza geral caracterizando assim o processo de generalizar inerente ao raciocínio indutivo.

Quadro 13: Atividade 3 e respostas apresentadas por B1 e C2.
Fonte: Arquivo dos autores

<table>
<tr>
<td>3) É possível encontrar o número de triângulos em qualquer nível? Para um nível qualquer n, qual seria o número de triângulos? Justifique sua resposta. E se n for um número muito grande, o que você pode afirmar?</td>
<td>B1: Sim. Seria mais de 2 bilhões, porque no nível 6 já foi 729, imagine no nível 30 [sic].

<table>
<tr><th>NÍVEL</th><th>QUANTIDADE DE TRIÂNGULOS PRETOS</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1 TRIÂNGULO</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3 TRIÂNGULOS</td></tr>
<tr><td>2</td><td>9 TRIÂNGULOS</td></tr>
<tr><td>3</td><td>27 TRIÂNGULOS</td></tr>
<tr><td>4</td><td>81 TRIÂNGULOS</td></tr>
<tr><td>5</td><td>243 TRIÂNGULOS</td></tr>
<tr><td>6</td><td>729 TRIÂNGULOS</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

B1 formulou uma estratégia de resolução, tomando como base um conhecimento prévio, caracterizando o processo de conjecturar.

Quadro 14: Atividade 3 e respostas apresentadas por B1, B3 e A3.
Fonte: Arquivo dos autores.

4) O que está acontecendo com o tamanho de triângulos novos e com a quantidade de triângulos novos que estão sendo gerados no decorrer do processo com a variação dos níveis?	*B1: A quantidade de triângulos tá aumentando [sic].* *B3: Seria menor que um vírus o tamanho num nível bem grande [sic].* *A3: A quantidade de triângulos está indo para o infinito e o tamanho cada vez menor [sic].*

Na questão 4, os estudantes da escola A e B estabeleceram um padrão por meio da identificação de uma propriedade comum a um conjunto de objetos,tomando como base a observação e a construção. Estabeleceu-se uma conjectura de natureza geral caracterizando o processo de generalização inerente ao raciocínio indutivo. Já os alunos da escola C, não conseguiram responder a esta questão (Quadro 14).

Por meio das expressões dos estudantes B1 "*No nível 5: 243 e no nível 6: 729. Porque é a mesma lógica que falei é só você contar 81×3 dá 243 e 243×3 dá 729 [sic]*" e C3 " *O professora a gente vai fazer 9×3 que vai dar 27 (nível 2 para o nível 3) e dá 81? (nível 4? porque eu acho que 27×3 dá 81). Vai dar 243 que é 81 ×3 (nível 5). 729.* Percebe-se a elaboração de um processo recursivo, conduzindo ao reconhecimento do padrão da sequência analisada. Entretanto, em relação às propriedades operatórias elementares, não há referência à potenciação.

3.4 Atividade 4 – Triângulo de Pascal

A atividade 4 envolveu o Triângulo de Pascal e sua elaboração teve como princípios: g1, g2, g3, e1 e e3. Aqui, os conhecimentos prévios envolvem operações com números naturais, simetria e regularidades. A atividade envolveu o Triângulo de Pascal e foi desenvolvido com os estudantes com o objetivo de associação com o Triângulo de Sierpinki (Figura 4). Como o Triângulo de Pascal é um objeto de ensino pertinente para despertar o interesse dos estudantes de forma lúdica. A atividade foi realizada em um encontro de duas horas.

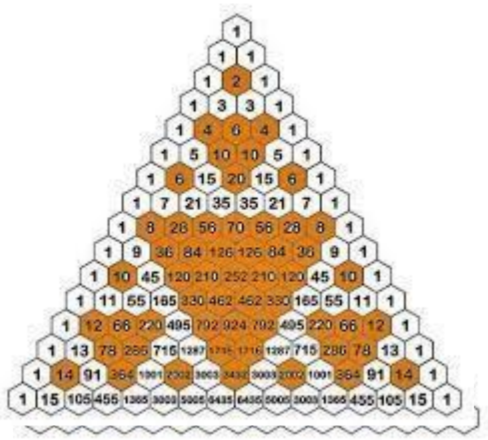


Figura 4: Relação entre Triângulo de Pascal e Triângulo de Sierpinski
Fonte: Disponível em: www.brasilescola.uol.com.br acessado em 15 de julho de 2021.

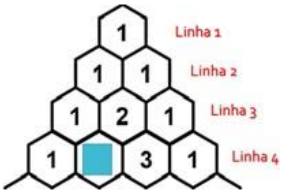
Das informações reunidas durante a execução desta atividade, estão dispostos aqui alguns excertos representativos das respostas dos estudantes das três turmas, assim como as questões exploradas, nos Quadros 15 a 20.

Quadro 15: Enunciado da questão 1 da atividade 4 e respostas apresentadas por A1 e A3
Fonte: Arquivo dos autores

QUESTÃO 1: Observe e analise cada linha destacada no Triângulo de Pascal. Qual o número escondido da linha 3? Porque? 	*A3: O número é zero prof, porque na linha 1 tem o um, na linha 2: 1+1=2; 1+2=3 que já tá na linha 3, ou seja o número que está escondido na linha 3, ali embaixo é zero [sic].* *A1: É um, porque todos os uns tão em formato de triângulo, só tem um 2 ali no meio de todos os números. Então como nessa ponta da linha 3 tem o 1, nesse aqui também deve tá o 1 [sic].*

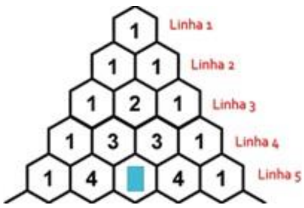
A3 considerou, por meio da observação e do seu conhecimento prévio relacionado as operações básicas, uma adição entre os números dispostos nas linhas e constatou que o número 'escondido' poderia ser zero, levando em conta uma sequência numérica. Já A1, embora tenha encontrado o número correto (número 1), relatou sua inferência tendo como base a observação do formato triangular,observando a simetria do fragmento do triângulo. Observamos que tanto A3 quanto A1 formularam uma estratégia para resolução, ou seja, formularam uma conjectura, processo associado ao raciocínio abdutivo. A resposta esperada pelos alunos era o número 1, e o raciocínio esperado era somente relacionado a observação da simetria ou da adição. Essa questão consistiu em uma prévia para as questões seguintes que foram divididas por linhas com as respostas corretas inseridas na sequência de cada questão.

Quadro 16: Enunciado da questão 2 da atividade 4 e respostas apresentadas por B3 e C1.
Fonte: Arquivo dos autores

QUESTÃO 2: Qual o número escondido na linha 4? Porque? 	*B3: na linha 1 dá 1, na segunda linha 1+1é 2, na terceira linha 1+2+1 é 4, daí aqui na última linha que tamo agora 1+3+1: 5 e daí +1:6 [sic].* *C1: Eu acho que já sei o que que é. A gente vai pegar o 2 ali e vai somar com +1 que vai dar o 3 [sic].*

Na questão 2, B3 formulou uma estratégia de resolução, por meio da observação e conhecimento prévio, semelhante a A3, utilizando a adição dos números dispostosem cada linha e sequência numérica. Já C1 também utilizou o padrão da adição, porém associou a linha anterior com a linha seguinte, encontrando uma possível solução e encontrando o padrão da seuência gerada, tendo como base a observação e a transformação de conhecimento prévio envolvendo a operação de adição e simetria. Neste caso, B3 desenvolveu o raciocínio abdutivo para formular uma conjectura e C1, além de conjecturar, esteve próximo de generalizar, caracterizando os raciocínios abdutivo e indutivo.

Quadro 17: Enunciado da questão 3 da atividade 4 e respostas apresentadas por B2 e C1.
Fonte: Arquivo dos autores.

QUESTÃO 3: Qual o número escondido na linha 5? 	*B2: Eu acho que é 4. é que a linha 2 é o número 1, a linha 3 tem o número 2, a 4 tem o número 3 e a 5 eu acho que deve ter o número 4 [sic].* *C1: É 3+3 e fica 6 [sic].*

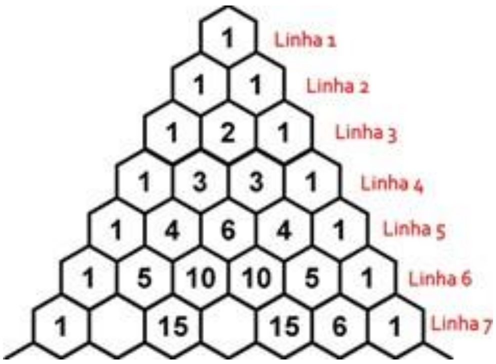
Nesse item, B2 formulou uma estratégia de resolução, tendo como base a observação dos números considerando uma simetria entre eles. Desta forma, conjecturou em acordo com o raciocínio abdutivo. C1 conjecturou em acordo com o processo de generalização da questão anterior, pois, tendo como base a observação e transformação do conhecimento prévio, reconheceu um padrão comum entre o conjunto dos números do triângulo, considerando a adição entre os dois primeiros números da linha anterior sendo o resultado do número da linha seguinte, desenvolvendo o raciocínio indutivo.

Quadro 18: Enunciado da questão 4 da atividade e respostas apresentadas por A2 e B1.
Fonte: Arquivo dos autores.

QUESTÃO 4: Qual o número escondido na linha 6? Porque? 	*A2: Eu sei, Ó lá em cima, antes quando nós tava vendo que número que era perto do quatro, tinha 3 em cima, então 3+3 é 6 e daí ali em baixo do lado do 6 tem o 4, e daí do outro lado lá 6+4 é 10 né e do outro também pode ser, porque 6+4 é 10 [sic].* *B1: 10, eu acho que é 10. Porque ali na linha 4 são dois 3 e dois 1. na linha 5 são dois 4 e dois1, na linha 6 tem dois 1, dois 5 e poderia ter dois 10 [sic].*

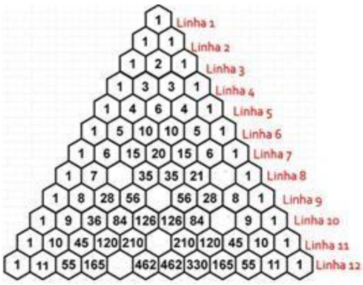
Na resposta apresentada por A2, percebemos seu entendimento pelo comportamento do conjunto de números do triângulo e sua explicação demonstra um reconhecimento de padrão entre os números, por meio de uma combinação de observação e transformação de conhecimento prévio envolvendo adição e simetria, o que caracteriza o processo de generalização inerente ao raciocínio indutivo. Já B1 formulou uma estratégia baseado na observação da simetria do triângulo, ou seja, verificando que os números dispostos no triângulo a esquerda são iguais aos números da direita, constatando a resolução correta, correspondendo ao processo de generalizar, característico do raciocínio indutivo.

Quadro 19: Enunciado da questão 5 da atividade 4 e respostas apresentadas por A1, A4, A5, B4 e C2.
Fonte: Arquivo dos autores.

QUESTÃO 5: Quais os números escondidos na linha 7? 	*A1. Eu acho que um número é 6 e o outro é 20. Tipo igual eu fiz aquela hora, tipo 10+10 seria o 20, ali no canto daí seria 6 [sic].* *A4: Eu acho que no canto esquerdo é 6, porque todos os do lado é o mesmo número,ali no 5 é 4 de um lado e 4 no outro [sic].* *A5: Lá em cima é um, Descendo na diagonal tem 1;2;3;4;5 mas não tem o número de baixo, ali com certeza é 6 [sic].* *B4: Eu acho que é 20. Pq 3+3 (linha 4) dáo 6 da linha 5. E 10+10 (linha 6) dá 20 (linha 7) [sic].* *C2: Na linha 2 tem o número 1, na linha 3 tem o número 2, na linha 4 tem o número 3, na linha 5 tem o número 4, na linha 6 tem o número 5 e na última linha que é do 7 vai ser o 6 (observou a diagonal) [sic].*

A1 e B4 reconheceram um padrão entre os números do triângulo e ampliaram o domínio de validade deste padrão, por meio da combinação de observação e transformação do conhecimento prévio, levando em conta a operação de adição dos números da linha anterior como resultado da linha seguinte. Constatou-se que A4 considerou a simetria do triângulo e reconheceu uma propriedade por meio da observação simétrica dos números. A5 e C2 consideraram a diagonal do conjunto de números do triângulo, e constataram uma sequência numérica por meio da observação. Assim, A1, B4 e A4 formularam uma conjectura de natureza geral, conduzindo a uma generalização, a qual está associada Já A5 e C2 conjecturaram, conduzindo a uma abdução.

Quadro 20: Enunciado da questão 6 da atividade 4 e respostas apresentadas por C3 e C1.
Fonte: Arquivo dos autores.

<table>
<tr>
<td>QUESTÃO 6: Quais números estão faltando?

</td>
<td>C3: 330 a linha 12, porque à esquerda tem 1; 11; 55; 165 e 330 e na direita tem o1;11;55; 165 e falta só o 330 [sic].

C1: 70 professora, porque 35+35 dá 70 [sic].

C3: O professora no outro lado vai dar 7 porque tá seguindo uma linha lá: 1;2;3;4;5;6 e7 que é o do próximo que é do último ali (linha 8) [sic].</td>
</tr>
</table>

Na questão 6, a maioria dos estudantes reconheceu a propriedade comum, tendo como base a observação, portanto conseguiram generalizar, com base em combinações de observação e transformação de conhecimento prévio, envolvendo operação de adição e simetria. C1 e C3 reconheceram o padrão simétrico existente no triângulo, já C1, como citado em questões anteriores, reconheceu o padrão de soma entre linha anterior e linha seguinte.

Durante essa atividade, a professora observou que os estudantes utilizaram diversas formas distintas para resolução, ou seja, desenvolveram conjecturas envolvendo simetria e adição entre números em diferentes perspectivas. A expressão de C3 na questão 6, "*330 a linha 12, porque à esquerda tem: 1; 11; 55; 165 e 330 e na direita tem: 1;11;55; 165 e falta só o 330 [sic]"* mostra que ele observou apenas pela simetria, ja *C1, na questão 2, " eu acho que já sei o que que é. A gente vai pegar o 2 ali e vai somar com +1 que vaidar o 3 [sic]."* Descobriu a regularidade utilizando a adição e o fez para as questões seguintes. Percebeu-se que os estudantes ampliaram seus conhecimentos relativos a temática da atividade.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta investigação envolvendo a Geometria de Fractais por meio de atividades exploratórias teve como foco a análise sobre os tipos e processos de raciocínio movidos por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental.

Percebemos, por meio da análise dos dados coletados, que os estudantes desenvolveram ações relacionadas aos processos de conjecturar e generalizar, utilizando o raciocínio abdutivo e indutivo. Na atividade 4, questão 1, por exemplo, está demonstrado que os estudantes A3 e A1 utilizaram como base a observação e o conhecimento prévio para formularem estratégias para resolução da atividade, elaborando conjecuras, processo associado ao raciocínio abdutivo. Na atividade 2, questão 5, o estudante A1 utilizou como base a observação e transformação do conhecimento prévio e conseguiu reconhecer um padrão, caracterizando o processo de generalização inerente ao raciocínio indutivo. Também na atividade 3, questão 1, os alunos A3, B1 e C3 reconheceram um padrão por meio da identificação de uma propriedade comum a um conjunto de objetos, tendo como base a observação, raciocinio indutivo.

Entretanto, os estudantes apresentaram certa dificuldade em justificar, processo inerente ao raciocínio dedutivo, não havendo ocorrência dessa inferência no desenvolvimento das atividades. Com relação as lacunas de aprendizagem, podemos observar no quadro 7, questão 3 da tarefa 2, uma defasagem de aprendizado relacionada aos conceitos, definições e operações dos números decimais e frações, quando o estudante A1 diz que não há como dividir 1cm em 3 partes para descobrir qual seria a medida de cada segmento do nível 4.

De modo geral, houve participação, interesse e curiosidade dos estudantes durante as aulas em três fases, em que todos realizaram conjecturas, porém nem todos conseguiram generalizar e nenhum conseguiu justificar. Contudo, as atividades instigaram os estudantes na compreensão de saberes envolvendo a Geometria Fractal.

Este estudo permitiu compreender que a realização de atividades exploratórias abrangendo a Geometria Fractal em sala de aula é potencial na promoção do Raciocínio Matemático e oportuniza aos estudantes a formulação de conjecturas, transformação do conhecimento prévio, bem como a reflexão e comunicação do Raciocínio Matemático. O papel do professor neste processo é de fundamental importância para conduzir as atividades e instigar os alunos a serem protagonistas de suas ações em sala de aula. As atividades exploratórias envolvendo a Geometria Fractal apresentadas neste artigo podem contribuir para que professores interessados em promover o Raciocínio Matemático de seus alunos, em sala de aula, conforme a realidade. É importante ressaltar uma limitação deste estudo no que diz respeito a não utilização de construções em softwares de geometria dinâmica. Além disso, uma abordagem com Geometria Fractal em três dimensões representa uma motivação futura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barbosa, R. M. (2005). Descobrindo a Geometria Fractal para sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica.

Borssoi, J. A. (2005). Geometria Fractal: alguns conceitos e aplicações. Universidade Estadual do Oeste do Paraná.Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática).

Brasil. (2017). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasilia, DF:MEC/SEB.

Colucci, V., & Valim. M. J. (2008). Geometria Fractal no Ensino Fundamental e Médio. Acesso em: 06 de jul. 2021. http://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/13.pdf.

Davis, P., & Hersh, R. (1986). A experiência matemática (3rd edition). Rio de Janeiro: Francisco Alves. (Original in english, published in 1982)

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2012). Investigação em Educação matemática. 3. ed. Campinas: Autores Associados.

Ponte, J. P.; Quaresma, M. & Pereira, J. M. (2020), Como Desenvolver o Raciocínio Matemático em Sala de Aula? Educação e Matemática,156 Lisboa: APM.

Santos, L.; Mata-Pereira, J.; Ponte, J. P.; Oliveira, H. (2017). *Teachers' understanding of generalizing and justifying in a professional development course. Project REASON – Mathematical Reasoning and Teacher Education*, Lisboa.

Stein, M.; Engle, R.; Smith, M. & Hughes, E. (2008). *Orchestrating productive mathematical discussions: fi ve practices for helping teachers move beyond show and tell. Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), p. 313–340.