

CONSIDERAÇÕES SOBRE O USO DE REPRESENTAÇÕES DIAGRAMÁTICAS NO CÁLCULO DE PROBABILIDADES CONDICIONADAS

Considerations on the use of diagrammatic representations in the calculation of conditional probabilities

Carla Santos [carla.santos@ipbeja.pt]

Instituto Politécnico de Beja e Centro de Matemática e Aplicações (CMA) – FCT– Universidade Nova de Lisboa - Portugal

Cristina Dias [cpsd@ipportalegre.pt]

Instituto Politécnico de Portalegre e Centro de Matemática e Aplicações (CMA) – FCT– Universidade Nova de Lisboa - Portugal

Recebido em: 27/08/2020

Aceito em: 10/03/2021

Resumo

A capacidade de compreensão e uso de informação probabilística, é, atualmente, crucial em todas as vertentes da vida dos cidadãos, sendo, portanto, imprescindível dotá-los das competências de cariz probabilístico que lhes permitam lidar eficazmente com situações associadas a fenómenos aleatórios. Perante as evidências de que a abordagem tradicional ao estudo da Teoria das Probabilidades não contribui para a eliminação das intuições erradas associadas às probabilidades, em particular quando se trata de probabilidades condicionadas, propomos a adoção de representações diagramáticas, que permitam visualizar os acontecimentos condicionado e condicionante, e apresentamos a sua aplicação ao clássico problema de Eddy.

Palavras-chave: Probabilidade condicionada; Teorema de Bayes; Intuição; Diagrama de Venn; Diagrama em árvore.

Abstract

The ability to understand and use probabilistic information is currently crucial in all aspects of citizens' lives, so it is essential to provide them with probabilistic skills that allow them to deal effectively with situations associated with random phenomena. Since there is evidence that the traditional approach to the study of Probability Theory does not contribute to the elimination of the faulty intuitions about probabilities, in particular about conditional probabilities, we propose the adoption of diagrammatic representations, which allow visualizing the conditioned and conditioning events, and we present an application to the classic Eddy problem.

Keywords: Conditional probability; Bayes' theorem; Intuition; Venn diagram; Tree diagram.

Introdução

Desde os seus primórdios, a Humanidade sempre teve de enfrentar situações cujo resultado é incerto, sentindo a necessidade de quantificar o grau de incerteza de forma a controlar os efeitos associados a essas situações. Tão antigos quanto a própria civilização, os conceitos de incerteza e probabilidade são usados frequentemente no nosso dia-a-dia, em circunstâncias comuns como o estado do tempo ou as hipóteses de ganhar o primeiro prémio do Euromilhões, mas também em situações de incerteza mais específicas como a interpretação do resultado de um teste de diagnóstico médico.

Enquanto campo de estudo e ciência, a Teoria das Probabilidades sempre esteve intimamente ligada à vida quotidiana. Primeiro debruçando-se sobre os jogos de azar, mais tarde associada a problemas atuariais, estendendo-se progressivamente a quase todas as atividades humanas. Tirando partido da evidente associação da Teoria das Probabilidades aos fenómenos do quotidiano, o seu estudo académico recorre às vivências dos alunos e apela às suas experiências com fenómenos aleatórios, mas foca-se, quase sempre, na componente computacional, em problemas que exigem pouco mais do que a substituição dos dados do enunciado na fórmula. Nestas circunstâncias, os problemas de probabilidades condicionadas, estudados no âmbito académico, surgem numa dualidade de facilidade-dificuldade. Por um lado, ao se assemelharem a problemas correntes e se resumirem a procedimentos algébricos, são de fácil aceitação pelos alunos e de fácil resolução, por outro, essa familiaridade impulsiona propostas de resoluções sustentadas apenas pelo senso comum e intuição, com desprezo pelas regras da Teoria das Probabilidades. Ao contrário do que seria de supor, a intuição, baseada em experiências informais da vida quotidiana, não intervém positivamente na resolução de muitos desses problemas, e a aparente facilidade rapidamente se desvanece perante resultados contraintuitivos, só atingíveis através de raciocínios complexos, impossíveis de desenvolver através do conjunto limitado de princípios heurísticos em que as pessoas confiam (Kahneman et al., 1982).

Em Portugal, como em muitos outros países, o estudo de Probabilidades e Estatística faz, atualmente, parte dos currículos escolares desde os primeiros graus de ensino, indo de encontro à opinião de alguns investigadores que defendem que o adiamento do ensino formal das Probabilidades para idades mais avançadas dos alunos, dá lugar à formação e consolidação das muitas intuições erradas (Batanero, 2013; Fischbein, 1975).

Uma das evidências de que a abordagem comum ao estudo da Teoria das Probabilidades não contribui para a eliminação das intuições erradas associadas ao cálculo de probabilidades é a existência de grande número de alunos que ingressam no ensino superior mantendo o mesmo conjunto de intuições relativamente às probabilidades, que tinham anteriormente. Garfield & Ahlgren (1988), Konold (1995) e Leviatan (2002) defendem que só um tratamento específico destas concepções erradas poderá levar à sua eliminação.

Dificuldades associadas às probabilidades

Investigações de Watson & Moritz (2002), Polaki (2005), Tarr & Lannin (2005) e outros revelaram que os conceitos de probabilidades que mais equívocos provocam são os de probabilidade condicionada e o de probabilidade conjunta.

As dificuldades com o conceito de probabilidade condicionada manifestam-se nas mais diversas situações, em indivíduos de todas as idades e com diferentes graus de formação académica (Estrada & Díaz, 2006, Correia, Fernandes & Contreras, 2011), afetando a tomada de decisão em situações

importantes tais como testes médicos, veredictos judiciais e outros. De acordo com as pesquisas levadas a cabo por Falk (1986), Tversky & Kahneman (1983), Pollatsek et al. (1987), Gras & Totohasina (1995) ou Díaz & Batanero (2009), junto de alunos dos diferentes graus de ensino, do básico ao superior, as principais dificuldades apresentadas pelos alunos aquando do cálculo de probabilidades condicionadas estão associadas à falácia da condicional transposta, à falácia do eixo temporal (também designada por fenómeno de Falk), à falácia da conjunção, à falácia da taxa base e à não identificação do acontecimento condicionante. Em problemas apresentados em linguagem corrente (vulgarmente chamados problemas de palavras), estas dificuldades revelam-se de forma vincada na interpretação do enunciado (Pollatsek et al., 1987).

Atendendo a que o deficiente raciocínio abstrato e a reduzida intuição probabilística são importantes causas das dificuldades apresentadas pelos alunos, no estudo das probabilidades, (Garfield & Ahlgren, 1988), o tratamento específico dos equívocos associados às probabilidades condicionadas deve envolver a promoção destas duas competências.

Diversos investigadores defendem que para o reforço da intuição probabilística é imprescindível lidar com problemas contraintuitivos. Atendendo a que o desenvolvimento de raciocínios com grande componente visual melhora a intuição e a capacidade de assimilação de conceitos matemáticos (Zimmermann & Cuningham, 1991), a nossa proposta passa por utilizar representações diagramáticas na resolução desses problemas contraintuitivos, em linha com o proposto por Dupuis & Rousset-Bert (1996) e Zahner & Corter (2010).

Visualização e representações diagramáticas

Ao constituir uma linguagem universal, baseada em estruturas e relações lógicas, a representação diagramática desempenha um papel de relevo tanto na compreensão de conceitos como no processo de tradução de problemas matemáticos da linguagem corrente para a linguagem simbólica, tornando visível aquilo que antes da representação era de natureza abstrata (p.e. Barker-Plummer & Bailin, 1997).

Na última década do século XX, vasta investigação na área da didática incidiu sobre os diferentes aspetos da utilização de diagramas no ensino da Matemática (ver por exemplo, Zimmerman & Cunningham, 1991 e Wheatley, 1997), tendo chamado à atenção para o benefício que a visualização dos conceitos traz ao processo de ensino-aprendizagem. Desde então vem-se verificando, no contexto da educação matemática, uma tendência crescente para tornar o raciocínio visual como uma prática habitual.

Enquanto em Psicologia e na vida quotidiana, a palavra visualizar significa “formar uma imagem mental”, consistindo num processo exclusivamente mental, em Matemática o conceito de visualização refere-se ao processo de usar representações diagramáticas que traduzam um conceito ou problema e conduzam à sua compreensão e/ou resolução (Zimmerman & Cunningham, 1991). No caso particular da Teoria das Probabilidades, a resolução de problemas baseia-se muitas vezes na visualização interna e nas representações diagramáticas, em simultâneo (Zahner & Corter, 2010).

No estudo da Teoria das Probabilidades, o recurso a representações diagramáticas é prática corrente para ilustrar as operações com acontecimentos e calcular as probabilidades associadas a estas operações, para representar graficamente o conceito de probabilidade condicionada e resolver problemas relacionados com o teorema de Bayes.

O diagrama de Venn

Os diagramas de Venn foram introduzidos por John Venn (1834-1923) no seu artigo de 1880 “*On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasonings*”¹. Não sendo uma novidade o uso de diagramas para auxiliar a compreensão de silogismos, pois já tinha anteriormente sido usada por Leonhard Euler (1707-83), a melhoria introduzida por Venn, nos diagrams de Euler, constituiu uma enorme vantagem na resolução de problemas lógicos complexos. Ao invés dos diagramas de Euler, os diagramas de Venn permitem mostrar todas as possíveis relações lógicas entre uma coleção finita de conjuntos, permitindo ainda a representação de classes inexistentes, que Venn propõe ser traduzido através de sombreamento das áreas correspondentes no diagrama.

Como exemplo da forma como Venn conseguiu contornar algumas das limitações dos diagramas de Euler, comparemos os diagramas propostos por Euler e Venn para indicar “Todo o B é A, algum A não é B”.

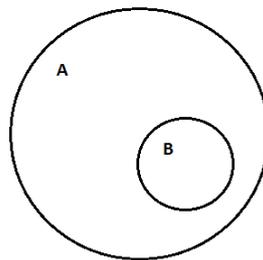


Figura 1: Diagrama de Euler para “todo o B é A”

Da análise do diagrama da figura 1 poderemos detectar três regiões (figura 2), representando “B e A”, “A mas não B” e “nem A nem B”, verificando-se que não existe nenhuma região que represente “B mas não A”.

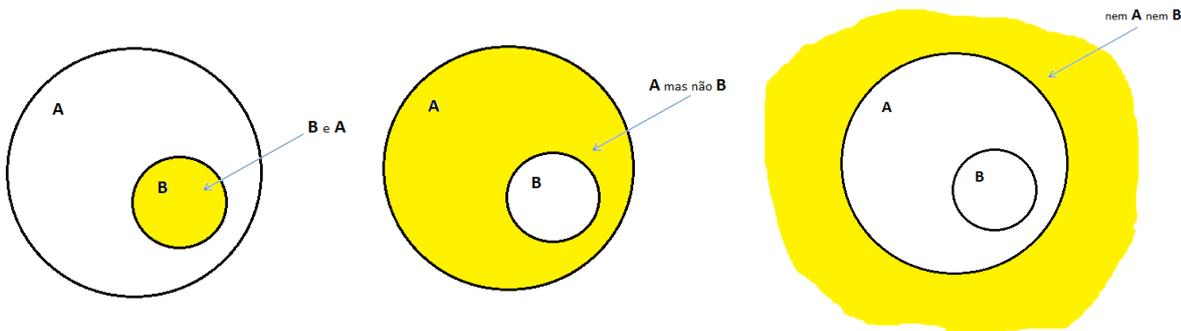


Figura 2: Regiões do diagrama de Euler para “todo o B é A”

Como se pode perceber da observação da figura 3, que representa o diagrama de Venn correspondente ao diagrama de Euler apresentado na figura 1, o diagrama de Venn permite mostrar

¹ “*On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasonings*” publicado no *Philosophical Magazine and Journal of Science* S. 5. Vol. 9. No. 59. July 1880

todas as relações lógicas entre A e B (figura 4). Atente-se que a introdução do sombreado permite a representação da classe correspondente a “B mas não A” e a indicação da sua inexistência.

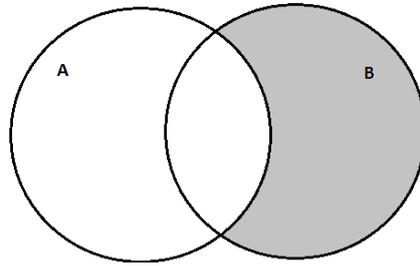


Figura 3: Diagrama de Venn para “todo o B é A”

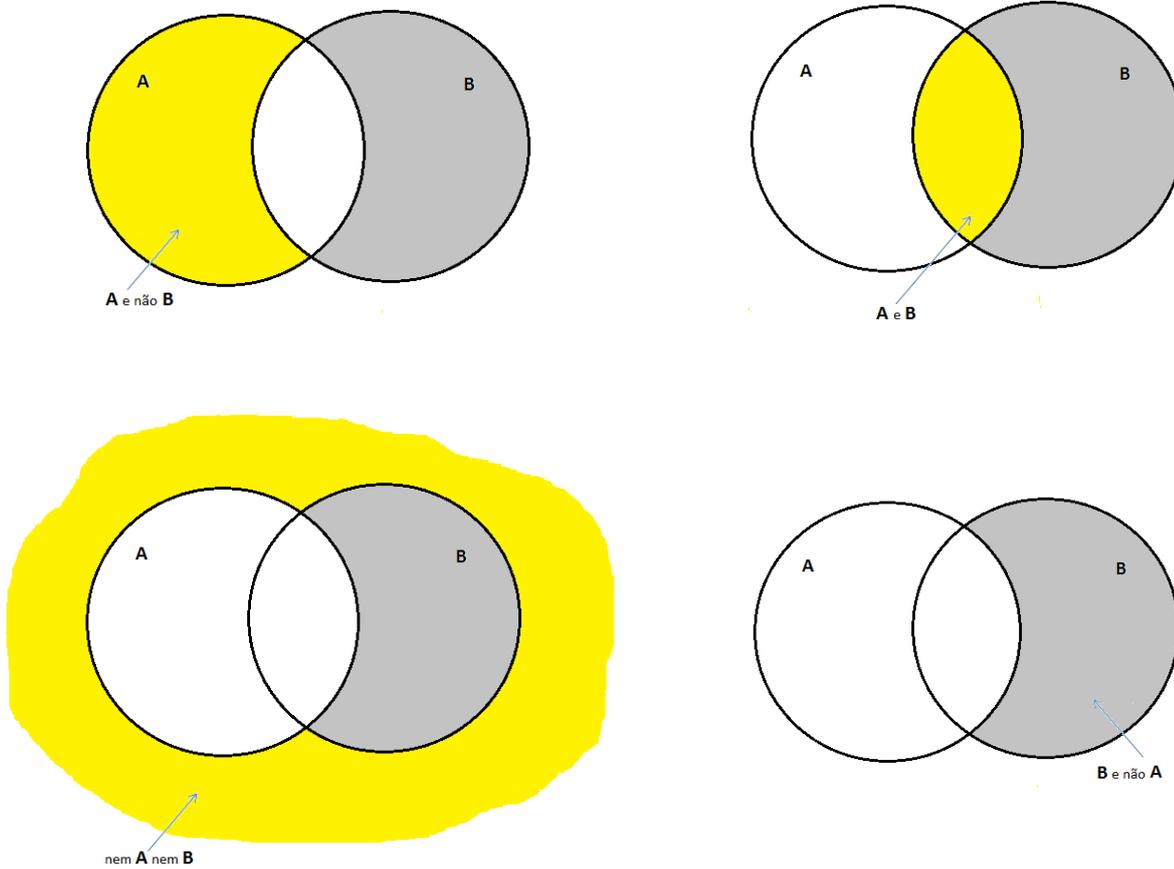


Figura 4: Regiões do diagrama de Venn para “todo o B é A”

Apesar das alterações, introduzidas por Venn, nos diagramas criados por Euler, Venn continuou a referir-se a esses diagramas como círculos de Euler. A primeira referência ao termo “diagrama de Venn” só surgiu mais de 100 anos após a introdução destes diagramas, no livro “A Survey of Symbolic Logic”, publicado em 1918 por Clarence Irving Lewis (Hunter, 2007).

Reconhecendo as vantagens dos diagramas propostos por Venn, a sua utilização extravazou a análise de argumentos lógicos e popularizou-se na Teoria de Conjuntos, onde os diagramas de Venn sofreram algumas mutações, nomeadamente, no que respeita ao uso do sombreado.

O diagrama de Venn, usado na Teoria de Conjuntos, é usualmente constituído por dois ou três círculos parcialmente sobrepostos, que representam os conjuntos, inscritos num rectângulo, que representa o universo. O conjunto solução de operações entre conjuntos é indicado, no diagrama, através do sombreado da região que o representa. Na figura 5, está representado o conjunto solução da intersecção dos conjuntos A e B.

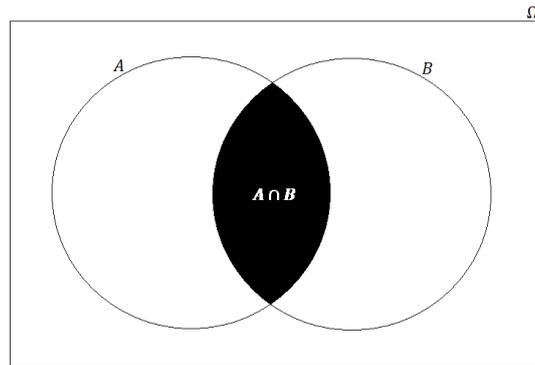


Figura 5: Representação da intersecção de dois conjuntos através de um diagrama de Venn

Visualizar as probabilidades condicionadas com diagramas de Venn

A conexão que os axiomas de Kolmogorov promovem entre a teoria de conjuntos e as probabilidades conduziu à natural adopção dos diagramas de Venn no estudo das probabilidades. Tanto quanto nos é possível saber, a obra de Feller, “Theory of Probability”, publicada em 1950, é a primeira que inclui diagramas de Venn para ilustrar as operações entre acontecimentos (Feller, 1968, p.15).

Apesar de existirem vozes dissonantes quanto à adequação do uso de diagramas de Venn para quantificar probabilidades (ver por exemplo Cherry & Oldford, 2002), é para muitos inegável a sua utilidade na compreensão de determinados conceitos da Teoria das Probabilidades e o recurso a diagramas de Venn tornou-se prática corrente para representar o espaço de resultados, ilustrar as operações entre acontecimentos e calcular as probabilidades dos acontecimentos resultantes dessas operações.

No que respeita à utilização de diagramas de Venn em associação com o conceito de probabilidade condicionada, a adopção deste tipo de representação diagramática possibilita visualizar as alterações resultantes das informações adicionais que conduzem à proposição condicionada e perceber a respectiva redução do espaço amostral, como mostram as figuras 6 e 7.

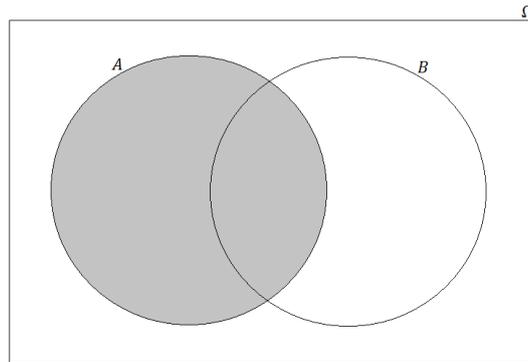


Figura 6 : Representação da probabilidade incondicionada do acontecimento A

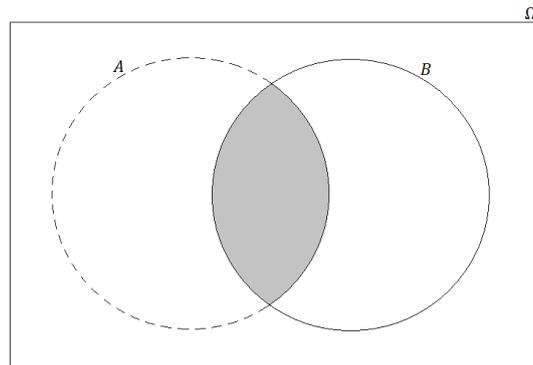


Figura 7 : Representação da probabilidade do acontecimento A condicionada pela realização do acontecimento B

Aludindo à regra de Laplace, na figura 6, a probabilidade do acontecimento A é ilustrada através da comparação da área do conjunto A (casos favoráveis) com a do retângulo que representa o espaço de resultados (casos possíveis). Na figura 7, a probabilidade do acontecimento A condicionada pela realização do acontecimento B é ilustrada através da comparação da área sombreada, que representa os casos em que ambos os acontecimentos A e B se realizam (casos favoráveis) com a do conjunto B, que representa o espaço de resultados reduzido pela ocorrência de B (casos possíveis).

Da observação do diagrama de Venn, da figura 7, decorre imediatamente a fórmula que permite calcular a probabilidade condicionada que traduz a probabilidade de ocorrência do acontecimento A sabendo que B ocorreu:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Para além de facilitarem o processo de introdução do conceito de probabilidade condicionada, as representações diagramáticas poderão também ser úteis na eliminação dos equívocos associados às probabilidades condicionadas. Na sequência dos estudos em que se comprova a elevada incidência da falácia da conjunção, da falácia da condicional transposta e outras, conduziram-se estudos para investigar de que forma o treino pode contribuir para a sua eliminação. Alguns desses estudos revelaram que o treino prévio dos participantes, sobre relações lógicas com o uso de diagramas de Venn, permite reduzir a incidência dessas falácias (ver p.e. Sedlmeier, 1999).

Para ilustrar o uso de diagramas de Venn para clarificação dos problemas de probabilidades condicionadas, vamos explorar a sua aplicação na resolução de um problema contra-intuitivo em que a falácia da condicional transposta se manifesta frequentemente.

A falácia da condicional transposta consiste na dificuldade em distinguir a probabilidade condicionada e a sua transposta (Falk, 1986), ou seja, traduz-se por uma troca entre o acontecimento condicionante e o acontecimento condicionado, o que prejudica a aplicação correta da redução do espaço amostral. Uma probabilidade condicionada consiste numa redução do espaço de resultados, que varia em função do acontecimento condicionante, portanto, a compreensão deste processo é essencial para o sucesso da resolução de problemas de probabilidades condicionadas e para evitar a falácia da condicional transposta.

Observando os diagramas de Venn representados na figura 8 (a) e (b), correspondentes à probabilidade condicionada, $P(A/B)$, e à sua inversa, $P(B/A)$, as diferenças entre esses diagramas são evidentes.

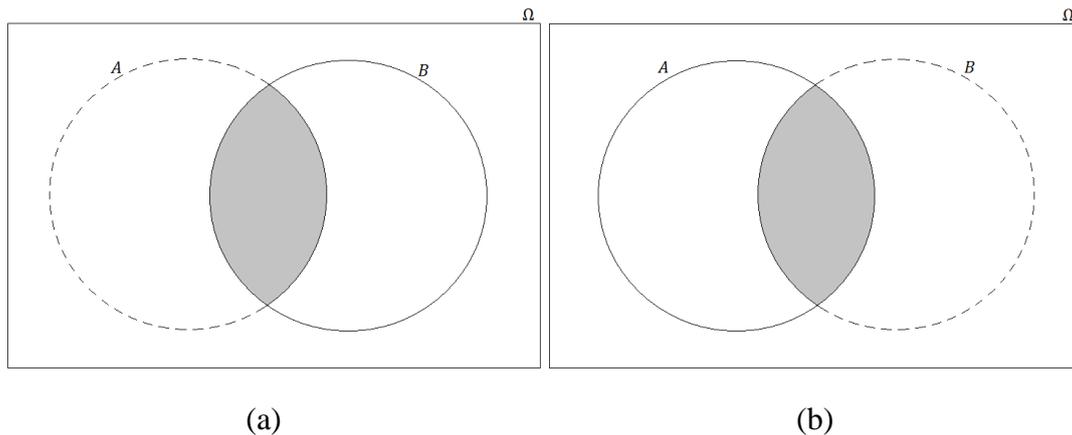


Figura 8: (a) Diagrama de Venn para $P(A/B)$. (b) Diagrama de Venn para $P(B/A)$.

Em ambas as probabilidades os casos favoráveis são aqueles em que ambos os acontecimentos, A e B, se realizam (área sombreada), contudo, os casos possíveis são diferentes, pois difere o acontecimento condicionante. No diagrama da figura 8 (a) o espaço de resultados é reduzido pela ocorrência de B e no diagrama da figura 8(b) o espaço de resultados é reduzido pela ocorrência de A.

Contornar a falácia da condicional transposta com um Diagrama de Venn

Tal como testemunhado na investigação de Falk (1986), e em muitas outras que se lhe seguiram, a falácia da condicional transposta é muito frequente entre os alunos no estudo das probabilidades, mas também, e com consequências bem mais graves, muito comum na interpretação dos resultados de testes de diagnóstico médico, verificando-se que tanto pacientes como médicos confundem a probabilidade de o teste dar positivo na presença da doença (a sensibilidade do teste) com a sua transposta, a probabilidade que um resultado positivo de um teste signifique presença de doença (o valor preditivo positivo).

Um exemplo clássico da manifestação da falácia da condicional transposta é o estudo levado a cabo por Eddy (1982), sobre as interpretações, feitas um conjunto de médicos, do resultado de um teste diagnóstico médico.

No problema usado no estudo de Eddy (1982) era solicitado que os participantes estimassem a probabilidade de uma mulher cuja mamografia deu positiva ter realmente cancro da mama, com

base na informação de que a taxa de prevalência da doença é de 1%, a sensibilidade do teste(mamografia) é de 80% e a taxa de falsos-positivos é de 9,6%.

Recorrendo à representação simbólica dos acontecimento envolvidos no enunciado, M = “ a mamografia deu positivo” e C = “ a mulher tem cancro da mama”, os dados do problema indicam que $P(C) = 0,01$, $P(M / C) = 0,8$ e $P(M / \bar{C}) = 0,096$. A probabilidade pretendida é $P(C/M)$.

Usando a fórmula de Bayes,

$$P(C/M) = \frac{P(M/C) \cdot P(C)}{P(M/C) \cdot P(C) + P(M/\bar{C}) \cdot P(\bar{C})}$$

conclui-se que a probabilidade de uma mulher cuja mamografia deu positiva ter realmente cancro da mama, $P(C/M)$, é aproximadamente 8%.

No estudo de Eddy, 95 dos 100 médicos a quem foi colocado o problema indicaram, para esta probabilidade, valores próximos dos 75%.

Como poderia o recurso a diagrama de Venn poderia ser vantajoso para o raciocínio associado ao problema de Eddy?

Estabelecendo como Universo, Ω , o conjunto de todas as mulheres, comecemos por representar os acontecimento C e M num diagrama de Venn .

De acordo com os dados do problema o conjunto C deverá ter 1% da área do Universo e o conjunto M deverá cobrir 80% da área de C e 9,6% da área exterior a C .

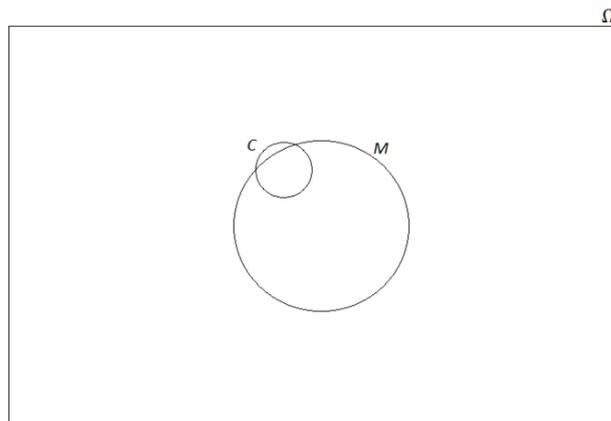


Figura 9: Diagrama de Venn, ilustrativo dos dados do problema de Eddy

Representando, no diagrama de Venn, a probabilidade de uma mulher cuja mamografia deu positiva ter realmente cancro da mama (figura 9), percebe-se que esse valor não poderia nunca ser próximo dos 75%, uma vez que corresponde apenas a uma pequena parte de M .

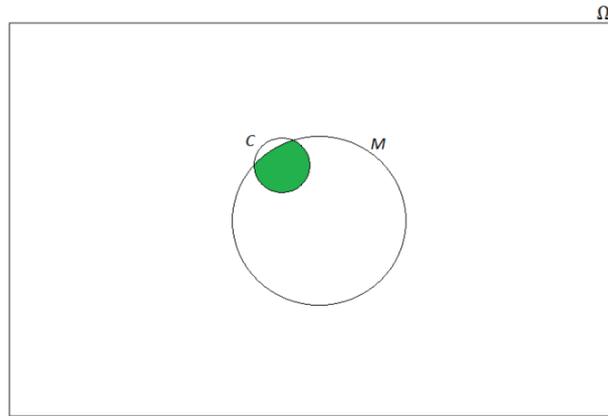


Figura 10: Diagrama de Venn, ilustrativo da abordagem à solução do problema de Eddy

O diagrama em árvore

Um diagrama em árvore é um modelo visual que permite organizar, de forma sistemática, todos os componentes de uma condição, fenómeno ou processo, através de um conjunto de nodos e ramos que descrevem diversos possíveis caminhos, representando ações ou escolhas, para atingir um objetivo final. Este tipo de diagrama é extremamente versátil o que possibilita a sua aplicação às mais diversas áreas, sendo frequentemente usado para ilustrar processos decisórios, permitindo identificar todas as etapas necessárias para implementar uma solução.

O diagrama em árvore inicia-se num nodo (a raiz) do qual saem ramos que conduzem a outros nodos, representando decisões ou acontecimentos mutuamente exclusivos. A partir destes nodos, decisões ou acontecimentos adicionais conduzem ao próximo nível de nodos. Este processo será repetido tantas vezes quanto necessário até que todas os possíveis resultados estejam representados.

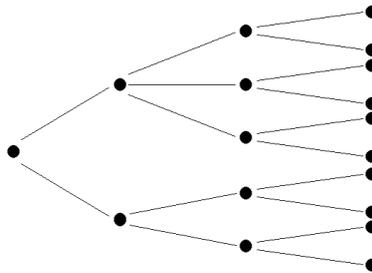


Figura 11: Diagrama de árvore

Visualizar as probabilidades condicionadas com diagramas em árvore

Em Teoria das Probabilidades, o diagrama em árvore é usado no cálculo de probabilidades de acontecimentos compostos, desempenhando, portanto, um importante papel na resolução de problemas com probabilidades condicionadas (Parzysz,1990).

Embora a estrutura do diagrama em árvore seja semelhante quer se esteja a lidar com acontecimentos dependentes ou independentes, e, em ambos os casos, a sua aceitação por parte dos alunos seja quase imediata, verifica-se que, no primeiro caso, a sua utilização nem sempre conduz à correcta resolução do problema que ilustra, devido à influência das probabilidades condicionadas.

Para que o diagrama em árvore seja eficaz, na compreensão das etapas que compõem a resolução de um problema envolvendo o teorema de Bayes, é necessário que as regras, que regem a sua construção, sejam enquadradas na teoria das probabilidades.

Seguindo Feller (1968), consideremos um conjunto de acontecimentos mutuamente exclusivos (partição do espaço de resultados, Ω), B_1, B_2, \dots, B_n , dos quais um ocorre necessariamente, e A um outro acontecimento de Ω que pode acontecer simultaneamente com apenas um dos acontecimentos $B_i, i = 1, \dots, n$, isto é,

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n),$$

que pode ser visualizado pelo seguinte diagrama em árvore.

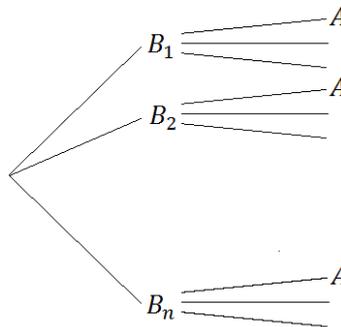


Figura 12: Diagrama em árvore representando $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$

Da observação do diagrama da figura 12, verifica-se que existem n caminhos, incompatíveis 2 a 2, que conduzem à realização do acontecimento A e que correspondem à possibilidade de ocorrência de A com cada um dos acontecimentos $B_i, A \cap B_i$.

Acrescentando as probabilidades ao diagrama da figura 12, obtém-se o diagrama da figura 13.

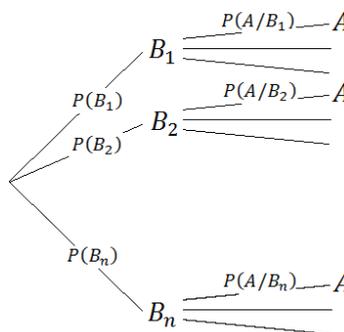


Figura 13: Diagrama em árvore com acontecimentos dependentes

Como $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$, a soma das probabilidades dos ramos que conduzem aos acontecimentos B_1, B_2, \dots, B_n é 1.

A probabilidade associada a cada um dos caminhos que conduzem à ocorrência de A é

$$P(A \cap B_i) = P(A/B_i) \cdot P(B_i), i = 1, \dots, n,$$

designado por teorema das probabilidades compostas e que poderia ter sido obtido analiticamente a partir da definição de probabilidade condicionada.

Tendo em conta que os acontecimentos $B_i, i = 1, \dots, n$, são mutuamente exclusivos, a probabilidade de A ocorrer é

$$P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A/B_n) \cdot P(B_n),$$

designado teorema das probabilidades totais, que obtido a partir do diagrama em árvore, corresponde à soma das probabilidades de todos os ramos.

Contornar a falácia da condicional transposta com um diagrama em árvore

Vejamos agora de que forma, com o auxílio de um diagrama em árvore, se poderia facilitar a resolução do problema de Eddy (1982), apresentado antes.

Começemos por representar num diagrama em árvore, os dados fornecidos no enunciado do problema (figura 14). A probabilidade de uma mulher daquela população ter cancro da mama é de 1% (taxa de prevalência da doença), a probabilidade de o teste dar positivo para uma mulher que possui a doença é 80% (sensibilidade do teste) e a probabilidade de o teste dar positivo para uma mulher que não possui a doença é 9,6% (taxa de falsos-positivos).

Recordando que os acontecimentos “a mamografia deu positivo” é representado por M , e o acontecimento “a mulher tem cancro da mama” é representado por C , o diagrama de árvore que ilustra os dados do problema é o seguinte

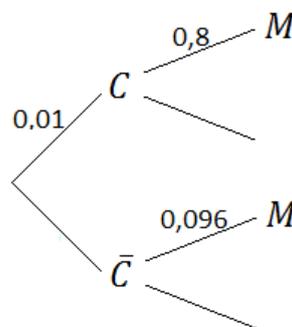


Figura 14: Diagrama em árvore com os dados do problema de Eddy

Dos dados iniciais podemos deduzir a probabilidade de uma mulher não ter cancro da mama (99%), a probabilidade de o teste dar negativo para uma mulher que possui a doença (20%) e a probabilidade de o teste dar negativo para uma mulher que não possui a doença (90,4%).

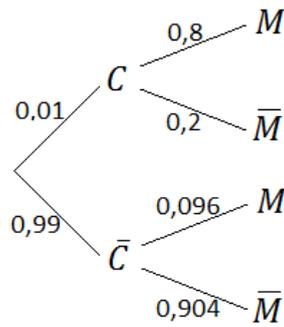


Figura 15: Diagrama em árvore com todas as probabilidades associadas ao problema de Eddy

Recordando que neste problema se pretende determinar a probabilidade de uma mulher cuja mamografia deu positiva ter realmente cancro da mama, $P(C/M)$, que é uma probabilidade condicionada, o seu cálculo envolve uma redução do espaço de resultados. Por outras palavras, o que pretende saber é a percentagem de mulheres que têm realmente cancro da mama de entre todas as que tiveram uma mamografia positiva. O espaço de resultado fica portanto limitado às mulheres cuja mamografia deu positiva. No diagrama de árvore, esse espaço de resultados poderá ser visualizado eliminando todos os percursos da árvore que não incluam o caso do acontecimento pretendido, M (mamografia positiva).

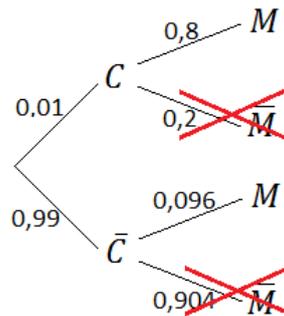


Figura 16: Diagrama em árvore com representação da redução do espaço de resultados

De entre os percursos que conduzem a M interessa apenas aquele em que está representado o valor associado às mulheres que têm cancro da mama, ou seja, o caminho que passa por C .

Recorrendo mais uma vez ao teorema de Laplace, a probabilidade pretendida será o quociente entre o número de casos favoráveis, ou seja, o percurso da árvore que conduz a M passando por C (representado, em linguagem matemática, por $P(M \cap C)$), e o número de casos possíveis, ou seja, todos os percursos da árvore que conduzem a M (representado, em linguagem matemática, por $P(M)$)

Observando o diagrama em árvore da figura 16 verifica-se que

$$P(M \cap C) = P(M/C) \cdot P(C) = 0,8 \times 0,01$$

e que

$$P(M) = P(M/C) \cdot P(C) + P(M/\bar{C}) \cdot P(\bar{C}) = 0,8 \times 0,01 + 0,096 \times 0,99$$

Pelo quociente entre as duas probabilidades anteriores obtém-se a fórmula de Bayes e a solução do problema de Eddy,

$$P(C/M) = \frac{P(M/C) \cdot P(C)}{P(M/C) \cdot P(C) + P(M/\bar{C}) \cdot P(\bar{C})} = 0,078.$$

Conclusão

Quer seja para a interpretação de informação de cariz probabilístico ou para a tomada de decisão perante situações de incerteza, a da Teoria das probabilidades marca presença na vida quotidiana e a sua crescente importância nas mais diversas áreas do saber tornaram imprescindível o seu domínio.

Face à necessidade de preparar os cidadãos para o exercício de uma cidadania informada e interventiva, os currículos escolares, dos diferentes níveis de ensino, passaram a prestar maior atenção ao estudo das Probabilidades. Apesar desta formação se vir iniciando cada vez mais precocemente, os equívocos associados à interpretação das probabilidades percorrem todos os níveis de ensino, e os alunos do ensino superior apresentam diversas dificuldades em lidar com problemas de Probabilidades.

De entre os conceitos de probabilidade que mais ideias erradas despoletam nos alunos está o de probabilidade condicionada, verificando-se que as dificuldades em lidar com este conceito se agravam perante problemas apresentados em linguagem corrente, tanto na interpretação do enunciado como no conseqüente processo de tradução do problema para linguagem simbólica.

A abordagem visual do conceito de probabilidade condicionada através de representações diagramáticas, como o diagrama de Venn e o diagrama em árvore, pode contribuir para o reforço da intuição probabilística e contornar as falácias associadas às probabilidades condicionadas.

Referências

- Barker-Plummer, D. & Bailin, S.C. (1997). The role of diagrams in mathematical proofs. *Machine Graphics & Vision*, 6, 25–56
- Batanero, C. (2013) Sentido Estadístico: componentes y desarrollo. In: Contreras, J. M.; Cañadas, G. R.; Gea, M. M.; Arteaga, P. (Eds) Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 1., 2013, Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 55-61.
- Cherry W. H. & Oldford, R. W. (2002) The poverty of Venn diagrams for teaching probability: their history and replacement by Eikosograms. Disponível em <http://sas.uwaterloo.ca/~rwoldfor/papers/venn/eikosograms/paper-ssnew.pdf>
- Correia, P. F., Fernandes, J. A. & Contreras, J. M. (2011) *Intuições de alunos do 9.º ano de escolaridade sobre probabilidade condicionada*. In: Nunes, C.; Henriques, A., Caseiro, A.; Silvestre, A.; Pinto, H.; Jacinto, H.; Ponte, J. (Orgs.). Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 1-13.
- Díaz, C. & Batanero, C. (2009). University students' knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 131-162.
- Dupuis, C. & Rousset-Bert, S. (1996). Arbres et tableaux de probabilité: analyse en termes de registres de representation. *Repères-IREM*, 22, 51-72.

- Eddy, D. M. (1982). *Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities*. In D. Kahneman, P. Slovic and A. Tversky (Eds.) *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press, 249-267.
- Falk, R. (1986). *Conditional probabilities: Insights and difficulties*. In: Davidson, R.; Swift, J. (Eds.). *Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistics*. Victoria, BC: University of Victoria, 292–297.
- Feller, W. (1968). *An introduction to probability theory and its applications*. Vol.1, 3rd ed. New York, Wiley
- Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht. Holland.
- Garfield, J. & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1),44-63.
- Gras, R. & Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 15 (1), 49-55.
- Hunter, B. (2007). *Clarence Irving Lewis*. Stanford Encyclopedia of Philosophy. Disponível em <http://plato.stanford.edu/entries/lewis-ci/>
- Kahneman, D., Slovic, P. & Tversky, A. (eds.) (1982) *Judgement Under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Konold, C. (1995) Issues in Assessing Conceptual Understanding in Probability and Statistics, *Journal of Statistics Education*, 3(1).
- Leviatan, T. (2002) *On the use of paradoxes in the teaching of probability*. Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 6), South Africa.
- Parzysz, B. (1990). *Un outil sous-estimé: l'arbre probabiliste*. *APMEP*, 69 (372), 47-54.
- Polaki, M. V. (2005). *Dealing with compound events*. In: Jones, G. A. (Ed.). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. New York, NY: Springer, 191–214.
- Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. & Hardiman, P. (1987). Understanding Conditional Probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255 – 269.
- Sedlmeier, P. (1999) *Improving Statistical Reasoning: Theoretical Models and Practical Implication*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Tarr, J. E. & Lannin, J. K. (2005). *How can teachers build notions of conditional probability and independence?* In: Jones, G. A. (Ed.). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. New York, NY: Springer, 215-238.
- Tversky, A. & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, 90 (4), 293-315.
- Watson, J. M. & Moritz, J. B. (2002). School students' reasoning about conjunction and conditional events. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 33 (1), 59-84.
- Wheatley, G.H. (1997). *Reasoning with images in mathematical activity*. In L.D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Mahwah, NJ: Erlbaum, 281-298.

Zahner, D. C. & Corter, J. E. (2010). The process of probability problem solving: Use of external visual representations. *Mathematical Thinking and Learning*, 12 (2), 177-204.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Mathematical Association of America, Washington D.C., 1-8.