O CONCEITO DE VETOR PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA LINEAR: UM OLHAR PELA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD

The Concept of Vector for the Teaching and Learning of Linear Algebra: a Look at the Conceptual Field Theory of Vergnaud

Ricardo Alexandre Alves Pereira [ric_pereira@ifsp.edu.br]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP) - Campus Bragança
Avenida Francisco Samuel Lucchesi Filho, 770 – Penha, CEP: 12.929-600; Bragança Paulista/SP
Samuel Rocha de Oliveira [samuel@ime.unicamp.br]
Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
Rua: Sérgio Buarque de Holanda, 651; Cidade Universitária; CEP: 13.083-859; Campinas

Recebido em: 29/10/2017
Aceito em: 09/05/2018

Resumo

Considerando a grande dificuldade na aprendizagem do conceito de espaço vetorial, que é objeto de estudo da Álgebra Linear, e reconhecendo que o conceito de vetor é a base para a sua compreensão, escolheu-se o conceito de vetor como tema do presente trabalho. Embora existam pesquisas que tratem do ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, há uma carência de investigações sobre a aprendizagem do conceito de vetor na perspectiva da teoria dos campos conceituais de Vergnaud. A pergunta que norteou a pesquisa foi: "Qual a clareza e estabilidade do conceito de vetor na estrutura cognitiva dos alunos antes de iniciarem o estudo de espaços vetoriais?". A investigação foi feita tendo por base a produção inicial de um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal de São Paulo – Bragança Paulista, em um minicurso sobre espaços vetoriais. A partir dos resultados, pode-se dizer que, de forma geral, o conceito de vetor, ainda não estava claro e, em alguns casos, não estava disponível na estrutura cognitiva do aluno.

Palavras-chave: espaço vetorial; vetor; campos conceituas.

Abstract

Considering the great difficulty in learning the concept of vector space, which is the object of study of Linear Algebra, and recognizing that the concept of vector is the basis for its understanding, we chose the concept of vector as the theme of the present work. Although there is research that deals with the teaching and learning of Linear Algebra, there is a lack of research on the learning of the vector concept from the perspective of Vergnaud's conceptual field theory. The question that guided the research was: "What is the clarity and stability of the concept of the vector in the cognitive structure of the students before starting the study of vector spaces?". The research was based on the initial production of a group of students of the Licenciatura degree in Mathematics, Federal Institute of São Paulo - Bragança Paulista, in a mini course on vector spaces. From the results, it can be said that, in general, the concept of the vector was still unclear and, in some cases, not available in the student's cognitive structure.

Keywords: vector space; vector; conceptual fields.

Introdução

A relevância da Álgebra Linear é evidente por sua presença em quase todos os domínios da Matemática, como os sistemas de equações lineares, a geometria, aritmética, estudo das quádricas, equações diferenciais, etc (Celestino, 2000).

Apesar dessa importância, estudos indicam que, em geral, há pouca aprendizagem dos alunos. Essa pode ser verificada pela seguinte análise feita por Celestino (2000, p. 13), a partir do índice de retenção da disciplina na Universidade de São Paulo (USP), Universidade Estadual Paulista (Unesp) e Universidade Estadual de Campinas (Unicamp): "[...] a Álgebra Linear figura entre as matérias que têm um alto percentual de retenção de 25 a 50%, refletindo as dificuldades dos estudantes com sua aprendizagem", e complementa,

> Isto não acontece somente no Brasil, pois pesquisas realizadas em outros países, por exemplo na França (cf. Dorier 1994), revelam que os alunos apresentam dificuldades na compreensão dos principais conceitos de Álgebra Linear, o que interfere em seus aproveitamentos (ibid)

Coimbra (2008), também, reconhece as dificuldades no ensino e na aprendizagem da Álgebra Linear nos cursos de graduação. Ele relata que, após décadas atuando no seu ensino, as dificuldades permaneceram. Em sua dissertação, aborda alguns aspectos que considera como possíveis obstáculos ao ensino-aprendizagem como dificuldades com o uso da geometria, com termos conhecidos de outras disciplinas, lógica e outras.

Segundo Dorier (2003), a Álgebra Linear representa, com o cálculo, as duas principais disciplinas matemáticas ensinadas em faculdades de ciências exatas. Afirma que o seu ensino sempre foi difícil. E destaca que nas duas últimas décadas, tornou-se uma área ativa para trabalhos de pesquisa em educação matemática em vários países.

Apesar de existirem pesquisas que tratam do ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, poucos fazem pelo olhar da teoria dos campos conceituais (TCC) de Vergnaud, como Andreoli (2009), Machado e Bianchini (2012) e Cardoso (2014; 2013). Considerando que o objeto de estudo da Álgebra Linear é o espaço vetorial e que para o entendimento desse é necessário a compreensão do conceito de vetor, pretende-se, por meio da TCC, contribuir e investigar a aprendizagem, dos alunos, do conceito de vetor no momento anterior ao ensino do conceito de espaço vetorial.

Teoria dos campos conceituais

A teoria dos campos conceituais foi desenvolvida por Gérard Vergnaud. Ela resgata os estudos de Vygotsky sobre o pensamento e a linguagem e utiliza o conceito de esquema de Piaget. Estudando o progresso dos conceitos cotidianos aos científicos (Grings; Caballero; Moreira, 2006). Diferente do foco piagetiano que é as operações lógicas gerais, o da TCC está no funcionamento cognitivo do "sujeito-em-situação", tendo como norte o conteúdo do conhecimento e o estudo conceitual desse (Franchi, 1999; Vergnaud, 1994).

A TCC considera que o conhecimento está organizado em campos conceituais.

Para Vergnaud (1998, p. 168), um campo conceitual[1] é "um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de

1 Também definido como um conjunto de *situações* (como será visto, elas são concebidas como tarefas).

pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição".

Os principais conceitos dessa teoria psicológica cognitivista, além do campo conceitual, são: concepção de conceito, situação, esquema e invariantes operatórios (teorema em ação ou conceito em ação).

Vergnaud (1988, 1990, 1993, 1997) atribui os seguintes significados dos referidos conceitos.

A) Concepção de conceito: a formação de uma conceito envolve três conjuntos - S, I e R:
- S (referente) é um conjunto de situações que produz sentido ao conceito;
- I (significado) é um conjunto de invariantes operatórios que sustenta a operacionalidade do conceito;
- R (significante) é um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos, diagramas...) que pode ser usado para indicar e denotar esses invariantes e designar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Um conceito adquire sentido por meio de um conjunto de situações. Assim, essas situações têm um papel preponderante na formação de um conceito, sendo o início de um campo conceitual.

B) Situação: é entendida como tarefa. Foi visto que as situações são responsáveis por dar sentido a um conceito. Esse sentido, de acordo com Vergnaud (1990, 1993) é uma relação do sujeito com as situações e com os significantes. Mais precisamente são os comportamentos e sua organização (esquemas), evocados no sujeito por uma situação ou por uma representação simbólica que constituem o sentido de tal situação ou representação para esse indivíduo (ibid.).

C) Esquema: é a organização invariante do comportamento para uma dada classe de situações[2]. Essa organização, conforme Vergnaud (1996), é baseada em quatro classes de elementos principais (ingredientes):

1. metas e antecipações - um esquema se direciona a uma determinada classe de situações, às quais o sujeito pode identificar metas e fazer previsões;
2. regras de ação - regras de busca de informação e controle dos resultados da ação;
3. invariantes operatórios (teoremas em ação[3] e conceitos em ação[4]) - conhecimentos contidos nos esquemas, possibilitando reconhecer os elementos que viabilizam a determinação, por inferência, das metas, antecipações e regras de ação.
4. inferência - por meio dela e a partir dos invariantes operatórios, é possível estabelecer metas, fazer previsões e localizar as regras para lidar com uma dada classe de situações.

Dentre essas classes, os invariantes operatórios possuem um papel de destaque, conforme será mostrado a seguir.

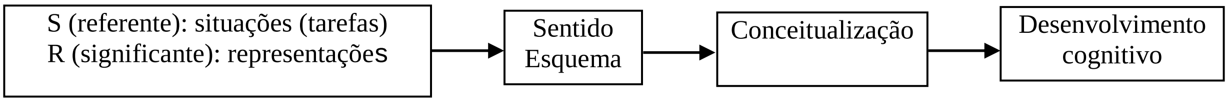
D) Invariantes operatórios (teorema em ação ou conceito em ação): constituem a base conceitual, implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e, a partir dela e da meta a alcançar, inferir as regras de ação mais adequadas para lidar com uma situação (Vergnaud, 1996).

O teorema em ação e o conceito em ação conduzem a evolução da ação sendo chamados de conhecimentos em ação. O vínculo teórico entre conceitos e a atividade é promovido por eles.

Para melhor se compreender a relação entre os conceitos expostos, é apresentado o esquema da Figura 1.

2 Uma classe de situações é um conjunto de tarefas que solicitam um mesmo esquema.
3 Teorema em ação é uma proposição considerada como verdadeira sobre o real (Vergnaud, 1998).
4 Conceito em ação é uma categoria de pensamento considerada como pertinente (Verganud, 1998).

Figura 1 - Relação entre alguns conceitos da TCC



As situações e/ou as representações são as iniciadoras do processo para o desenvolvimento cognitivo. O sentido se estabelece pela relação do aluno com esses conjuntos. Tal relação nada mais é que o esquema solicitado no aluno diante das referidas situações e/ou representações. A partir dos esquemas é que ocorre a conceitualização, a qual constitui o núcleo do desenvolvimento cognitivo.

De acordo com Franchi (1999) a ausência de uma conceitualização adequada está no centro da origem dos erros sistemáticos cometidos pelos alunos.

Como a conceitualização é uma consequência dos esquemas, pode-se afirmar que "é nos esquemas que devemos pesquisar os conhecimentos em ação do sujeito (os conceitos em ação e as teorias em ação), uma vez que é aí que podemos encontrar os elementos que fazem com que a sua ação seja operatória" (Carvalho JR.; Aguiar JR., 2008, p. 216).

Vergnaud (1993) ensina que as classes de situações em que os esquemas estão relacionados podem ser de duas formas:

1. aquelas em que o sujeito dispõe, no seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
2. aquelas em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-o, eventualmente, ao sucesso ou ao fracasso.

Para cada uma dessas classes, o conceito de esquema é diferente. Na primeira, os comportamentos são automatizados por apenas um esquema. Já na segunda, são utilizados vários esquemas na busca do objetivo a ser atingido. Esses esquemas concorrem para serem os mais adequados em uma dada classe sendo, muitas vezes, abandonados, modificados ou combinados entre si (Vergnaud, 1998).

A segunda classe de situações favorece a criação das situações adidáticas, pois propicia aos alunos momentos de descoberta. É nessas situações que o professor deve levar o aluno a aceitar a responsabilidade por sua aprendizagem, viabilizando a construção do seu conhecimento.

Assim, pelo acompanhamento desses momentos, é possível analisar os conhecimentos em ação pertencentes aos esquemas utilizados pelos alunos diante das situações adidáticas. Para a análise desse conhecimento, que é sobretudo implícito, se faz necessária a sua explicitação pelo aluno.

Como suporte teórico para o estudo do conceito de vetor, foi utilizada a TCC. Assim, foi elaborada uma atividade, composta por um conjunto de tarefas que versou sobre vetores, suas propriedades e formas de representação.

Para a análise do conhecimento matemático utilizado, pelo alunos, na atividade, fez se o uso, principalmente, do exame dos cálculos relacionais envolvidos nas operações para a resoluções das tarefas, tendo como referência o estudo realizado por Cardoso, Kato e Oliveira (2013), que fizeram uso desses cálculos em operações com matrizes.

O cálculo relacional caracteriza-se por uma visão das estruturas aditivas e das multiplicativas que vai além das quatro operações da aritmética. Essa perspectiva surgiu pela constatação de Vergnaud (2014), qual seja, os processos de conceitualização e as dificuldades dos alunos referiam-se, primeiro, aos objetos e às relações não numéricas, algo anterior, mas em solidariedade às operações propriamente numéricas.

Reforçando esse olhar, Vergnaud (2014, p. 18) afirma que

> A análise dos procedimentos não é por si própria suficiente para esgotar a análise científica dos problemas colocados pelo ensino da matemática. Na verdade, os meios utilizados pela criança, os caminhos que ela toma para resolver um problema ou atingir um dado objetivo numa determinada tarefa escolar, são profundamente enraizados na representação que ela faz da situação.

Assim, essa teoria busca, por meio do estudo das representações e dos procedimentos aplicados em certas tarefas, compreender o desenvolvimento e o estágio em que se encontra o conhecimento do aluno.

A noção de representação, empregada aqui, vai além da noção de símbolo ou de signo, abrangendo também a noção de conceito.

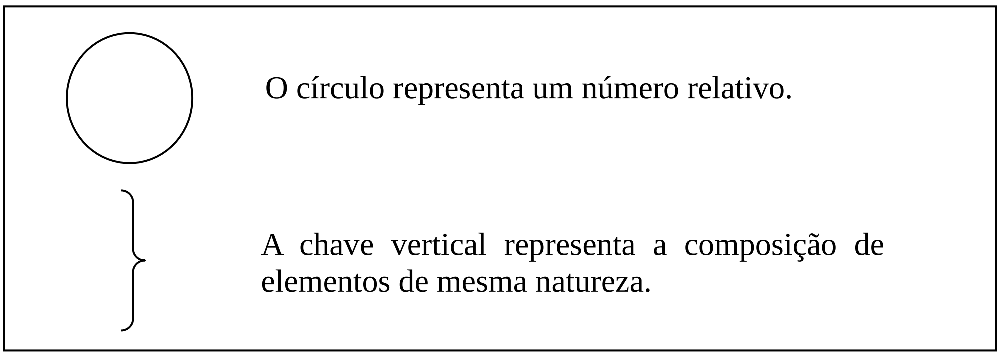
Conforme Vergnaud (2014, p. 19),

> O símbolo é a parte diretamente visível do *iceberg* conceitual; a sintaxe de um sistema simbólico é apenas a parte diretamente comunicável do campo de conhecimento que ele representa. Essa sintaxe não seria nada sem a semântica que a produziu, isto é, sem a atividade prática e conceitual do sujeito no mundo real.

A seguir, será feita uma explanação do funcionamento do cálculo relacional utilizado na elaboração e análise da atividade aplicada.

Inicialmente, mostra-se, na Figura 2, a representação que Vergnaud (2014) aconselha para o estudo em questão[5]:

Figura 2 - Código utilizado nos esquemas



Fonte: Vergnaud (2014, p. 201)

5 Os números relativos são os números inteiros, os quais são dotados de sinais. Os vetores, usados nesta pesquisa, têm como componentes apenas números inteiros, sendo considerados como "números relativos".

Como as situações propostas aos alunos envolveram propriedades de vetores do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, o círculo foi utilizado para representar esses vetores cujos componentes eram números inteiros.

O teorema seguinte, Figura 3, enumera as propriedades fundamentais de vetores nos espaços bi e tridimensionais.

Figura 3 - Propriedades da aritmética vetorial

Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores de um espaço bi ou tridimensional e k e l são escalares, então valem as seguintes relações.

(a) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

(b) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

(c) $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$

(d) $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

(e) $k(l\mathbf{u})=(kl)\mathbf{u}$

(f) $l(\mathbf{u}+\mathbf{v})=l\mathbf{u}+l\mathbf{v}$

(g) $(k+l)\mathbf{v}=k\mathbf{v}+l\mathbf{v}$

(h) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Fonte: Anton e Rorres (2001, p. 106)

Como pode ser constatado, os campos conceituais compreendidos na aritmética vetorial são os das estruturas aditivas e o das multiplicativas. No campo conceitual aditivo, aparecem as letras *a*, *b*, *c* e *d*. E no campo conceitual multiplicativo, as letras *e*, *g* e *h*. Na letra *f* existem operações dos dois campos.

Primeiramente, será tratado o campo conceitual aditivo.

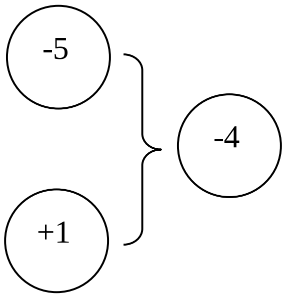
Campo conceitual aditivo – Aritmética Vetorial

Os exercícios pertencentes a este campo conceitual são chamados de "problemas de tipo aditivo" por Vergnaud, sendo entendidos como todos aqueles cuja solução exige tão somente adições ou subtrações. As relações aditivas são ternárias, ou seja, relações que associam três elementos entre si. A aritmética vetorial utiliza-se de uma estrutura aditiva que pode ser verificada na categoria[6] de estados relativos (relações) que se compõem para resultar em um estado relativo. Como exemplo, tem-se:

João deve 5 reais a Pedro, mas Pedro deve 1 real a João. Portanto, João deve 4 reais a Pedro.

6 Para Vergnaud, existem seis categorias fundamentais nas relações aditivas, sendo uma delas a de dois estados relativos que se compõem para resultar em um estado relativo.

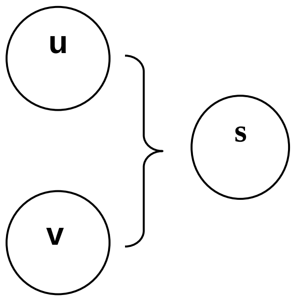
Os números -5, +1, -4 são números relativos (inteiros)
O cálculo relacional é representado como:



A equação correspondente é: (-5) + (+1) = (-4) (+ é a lei de composição que corresponde à adição de dois números relativos).

Fazendo uma correspondência com vetores do $\mathbb{R}^2$, de maneira genérica, obtém-se:

Dados os vetores $\mathbf{u}=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$ e $\mathbf{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2, \mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{s},$ esquematicamente tem-se:



A equação correspondente é:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{s}=(u_1,u_2)\,\mathbf{+}\,(v_1,v_2)=(u_1+v_1,u_2+v_2)=(s_1,s_2).$$

Para vetores do $\mathbb{R}^3$, a generalização é análoga.

Campo conceitual multiplicativo – Aritmética Vetorial

É possível diferenciar duas grandes categorias de relações multiplicativas: aquelas que comportam uma multiplicação e as que comportam uma divisão. Na aritmética vetorial, para as propriedades estudadas, existe o produto entre escalares e vetores. No caso da multiplicação, a principal relação é a quaternária (associa quatro elementos entre si) e não a ternária, como na adição. Como exemplo, tem-se:

1 novelo de lã tem massa de 50 gramas. São necessários 7 para fazer uma blusa. Qual vai ser a massa da blusa?

O cálculo relacional é representado como:

novelos		gramas
1	→	50
7	→	x

Em que a flecha horizontal indica uma transformação entre elementos de mesma natureza.

A representação algébrica é:

$$\frac{1}{7} = \frac{50}{x}.$$

Nessa forma de relação multiplicativa, utilizada na multiplicação de um escalar por um vetor, duas quantidades são de certo tipo (novelos / escalares) e as duas outras medidas, de outro tipo (gramas / vetores).

O esquema utilizado isola quatro quantidades particulares de um quadro mais completo, como segue:

novelos		gramas
1	→	50
2	→	100
3	→	150
4	→	200
5	→	250
6	→	300
7	→	350
8	→	400
9	→	450
.	→	.
.		.
.		.

Esse quadro de correspondência traduz o isomorfismo de dois tipos de medidas (número de novelos e massa em gramas). Esse isomorfismo coloca em jogo quatro quantidades, sendo que uma delas é igual a um. Vergnaud (2014) estabelece três grandes classes de problemas, conforme seja a incógnita uma ou outra das três outras quantidades.

As três classes podem ser ilustradas pelos seguintes esquemas (x representa a incógnita):

Multiplicação

$$\begin{array}{c|c} 1 \rightarrow & a \\ b \rightarrow & x \end{array}$$

Divisão: busca do valor unitário

$$\begin{array}{c|c} 1 \rightarrow & x \\ b \rightarrow & c \end{array}$$

Divisão: busca da quantidade de unidades

$$\begin{array}{c|c} 1 \rightarrow & a \\ x \rightarrow & c \end{array}$$

Fonte: Vergnaud (2014, p. 261)

Para a devida relação entre essas classes e a aritmética vetorial, foi mantido 1 como o “valor unitário”; substituído b por k, que é a quantidade do “valor unitário” e considerados **a** e **c** vetores, com x sendo a incógnita.

$$\begin{array}{c|c} 1 \rightarrow & \mathbf{a} \\ k \rightarrow & \mathbf{c} \end{array}$$

Em cada classe, o x assumirá a posição de **a**, k ou **c**.

Na atividade proposta e nos exemplos aqui exibidos, foi tomado $k \in \mathbb{R}$. Isso se deve ao objetivo da investigação, que é de identificar os conhecimentos prévios dos alunos em relação aos procedimentos para efetuar as operações de multiplicação e divisão envolvidas na aritmética vetorial, e não se os alunos sabem realizar multiplicações e divisões.

Fazendo uma equivalência com $k \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, de maneira genérica, para cada caso obtém-se:

Multiplicação $\mathbf{x} = k\mathbf{u}$.

O cálculo relacional é representado como:

$$\begin{array}{c|c} 1 \rightarrow & \mathbf{u} \\ k \rightarrow & \mathbf{x} \end{array}$$

A representação algébrica é:

$$\mathbf{x} = k\mathbf{u} = k(u_1, u_2) = (ku_1, ku_2).$$

<u>Divisão: busca do valor unitário</u> $\mathbf{x} = \mathbf{u}$.

O cálculo relacional é representado como:

$$\begin{array}{c|l} 1 \rightarrow & \mathbf{x} \\ k \rightarrow & k\mathbf{u} \end{array}$$

A representação algébrica é:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{k}(ku_1, ku_2) = \frac{1}{k}k(u_1, u_2) = (u_1, u_2).$$

<u>Divisão: busca da quantidade de unidades</u> $\mathbf{x} = k$.

O cálculo relacional é representado como:

$$\begin{array}{c|l} 1 \rightarrow & \mathbf{u} \\ x \rightarrow & k\mathbf{u} \end{array}$$

A representação algébrica é:

$$\text{Como } k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2) = k(u_1, u_2);\ \mathbf{u} = (u_1, u_2), \text{ então } x=k.$$

Para vetores do $\mathbb{R}^3$, nas três classes, a generalização é análoga.

Na letra *f*, das propriedades da aritmética vetorial,

$$l(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = l\mathbf{u} + l\mathbf{v}$$

existe uma soma vetorial seguida de um produto por escalar no primeiro termo. Essas operações podem ser classificadas separadamente: a soma no campo conceitual aditivo e o produto no campo conceitual multiplicativo.

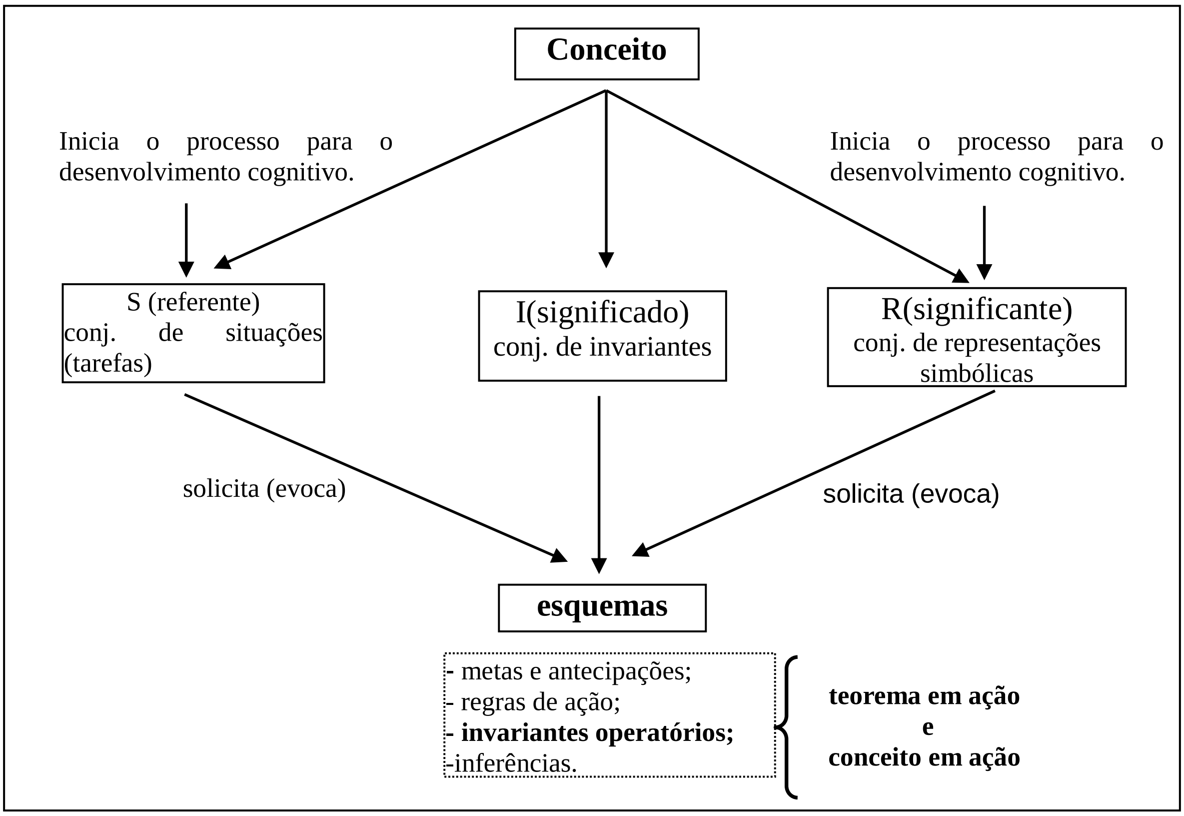
A abordagem do cálculo relacional na aritmética vetorial permite a constatação do desenvolvimento e estágio dos conceitos na estrutura cognitiva do estudante.

Na análise dos resultados, fundamentada na TCC, feita adiante, pôde-se verificar a grande contribuição desse recurso de pesquisa. Ele possibilitou a identificação dos esquemas utilizados pelos alunos em relação a cada campo conceitual e, com isso, reconhecer os invariantes operatórios (teorema em ação e conceito em ação) inadequados por eles empregados.

A importância desse conhecimento está em colaborar para que o professor seja capaz de intervir de maneira eficaz na aprendizagem do aluno, assim como preparar as aulas de maneira a criar condições que favoreçam uma aprendizagem alicerçada em uma base conceitual apropriada[7].

Para melhor compreender a correlação entre a TCC, o cálculo relacional e a aprendizagem dos alunos, é apresentada a Figura 4 que ilustra a conexão entre esses elementos.

Figura 4 - Conexão entre TCC, esquemas e invariantes operatórios



Como já visto, a formação de um conceito é o início de um campo conceitual, sendo definido pelos conjuntos: S (referente), I(significado) e R (significante). A partir de S e R é solicitado ao aluno esquemas[8], os quais têm quatro classes de elementos.

A classe mais importante para o ensino e a aprendizagem é a dos invariantes operatórios, pois é nela que se encontram o teorema em ação e o conceito em ação. Esses nada mais são que os conhecimentos (conhecimentos em ação) contidos nos esquemas. É nessa classe que o cálculo relacional entra em jogo, identificando o teorema em ação e o conceito em ação, utilizados pelo aluno numa dada situação. Com isso, o professor, por meio de uma mediação conveniente, pode conduzi-lo a uma conceitualização e a um desenvolvimento cognitivo esperados.

O estudo foi feito por meio da produção de um grupo de alunos, quando da utilização das atividades elaboradas. O relato da sua aplicação, a apresentação e a análise dos dados são feitos na sequência.

7 Uma base conceitual apropriada é aquela, normalmente, aceita por uma comunidade científica.
8 No esquema tem-se a organização dos invariantes operatórios, pertencentes ao conjunto I, para atuar em uma classe de situações.

Metodologia

A análise de conteúdo foi feita pela perspectiva da pesquisa do tipo qualitativa, conforme concebem Bogdan e Biklen (1994) e Goldenberg (2004). Para eles, esse tipo de pesquisa permite identificar e aprofundar a compreensão de particularidades do objeto de pesquisa que, em muitos casos, não seria possível pela pesquisa do tipo quantitativa.

A seleção dos participantes para a pesquisa foi feita tomando como critério de inclusão: alunos matriculados no curso de Licenciatura em Matemática do IFSP – Bragança Paulista; e como critério de exclusão: alunos que já tinham feito a disciplina de Álgebra Linear, a qual contempla o conteúdo de espaços vetoriais. Dentre esses, optou-se por alunos do terceiro semestre pois já tinham feito disciplinas que são pré-requisitos para uma melhor compreensão dos espaços vetoriais (Geometria I e II; Fundamentos de Geometria Analítica e Vetores com Geometria Analítica). Assim, após a apresentação das justificativas, objetivo e procedimentos da pesquisa, dos dezessete alunos desse semestre, onze se interessaram em fazer parte, mas apenas nove tiveram disponibilidade de horário para participar. Desses nove alunos, um aluno não participou das duas últimas aulas e da entrevista em razão de problemas pessoais. Assim, a pesquisa foi realizada com oito alunos.

Apresentação e análise dos resultados

A aplicação da atividade foi feita em duas aulas de 50min. No início, ocorreu a leitura, com os alunos, do termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE)[9], explicando-se cada fase da pesquisa e tirando as dúvidas. Após, foi informado que os exercícios que eles fariam deveria ser feito individualmente e que eles tratavam de vetores do IR^2 e IR^3. Foi pedido para que os alunos retomassem seus conhecimentos sobre o assunto e que, em cada resposta, procurassem expor o raciocínio utilizado por meio de cálculos e/ou anotações. Por fim, foi colocado que se não conseguissem fazer, relatassem as razões (não tinha aprendido, não lembrava, não tinha entendido a questão, etc.).

Como o objetivo dessa atividade era reconhecer o conhecimento prévio do aluno sobre o conceito de vetor, a interação entre o professor/pesquisador e os alunos se restringiu na explicação de algumas dúvidas sobre o que estava sendo pedido em alguns itens.

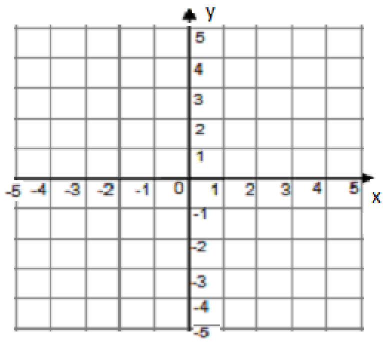
Esse instrumento de avaliação foi constituído por dez exercícios da seguinte forma:
- dois tratando sobre a definição de vetor;
- seis abordando operações de soma de vetores, subtração de vetores e produto de escalar por vetor. Nessas, existiam a solicitação tanto de cálculos algébricos como a representação geométrica em IR^2 e IR^3;
- um requerendo a elaboração, pelo aluno, de uma questão envolvendo vetores do IR^2 ou do IR^3;
- um a respeito do que o aluno esperava aprender na disciplina de Álgebra Linear II (disciplina pertencente ao quarto semestre do curso, a qual trata de espaços vetoriais).

Ao final, existia a possibilidade do aluno fazer comentários sobre os exercícios propostos.

O Quadro 1 apresenta os exercícios do instrumento de avaliação que foram utilizados para esta investigação, os quais serão analisados em seguida.

9 O projeto foi aprovado tanto pelo comitê de ética da UNICAMP (instituição proponente; CAAE: 64261716.8.0000.5404 – código na Plataforma Brasil), como pelo comitê de ética do IFSP (instituição coparticipante; CAAE: 64261716.8.3001.5473 - código na Plataforma Brasil).

Quadro 1 - Exercícios do instrumento de avaliação

Exercícios
1. O que é vetor? O que não é vetor?
7. Sejam $\vec{u} = (1,3)$ e $\vec{v} = (2,1)$. Represente os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $2\vec{v}$ e $\vec{u} + 2\vec{v}$ no plano cartesiano abaixo. 
8. Sejam $\vec{u} = (7,-4,3)$, $\vec{v} = (3,0,-9)$ e $\vec{w} = (28,-16,12)$. Resolva: a) $\vec{u} - \vec{w}$ b) $3\vec{u} + \vec{v}$ c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 3, determine $\vec{t}$. d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?
9. Elabore uma questão que envolva vetores do $\mathbb{R}^2$ ou do $\mathbb{R}^3$.

O Quadro 2 apresenta o conceito de vetor por meio da TCC, ou seja, as situações, os invariantes operatórios e as representações.

Quadro 2- Conceito de vetor

<table>
<tr><th colspan="3">Vetor</th></tr>
<tr><th>situações</th><th>invariantes operatórios</th><th>representações</th></tr>
<tr><td rowspan="2">- Operações de soma;

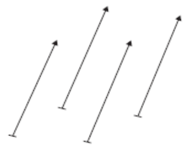
- Operações de subtração;

- Multiplicação por escalar;

- Representação em duas e três dimensões.</td><td>“Conceitos em ação”:

- vetor: é o conjunto de todos os segmentos orientados de mesmo módulo, direção e sentido;

- dados $\vec{v}=(v_1,v_2)$ e $\vec{w}=(w_1,w_2)$ então $\vec{v}+\vec{w}=(v_1+w_1,v_2+w_2)$

- dados $k \in ℝ$ e $\vec{v}=(v_1,v_2)$ então $k\vec{v}=(kv_1,kv_2)$</td><td rowspan="2">

$\vec{u}$;

$(u_1,u_2) \in ℝ^2$;

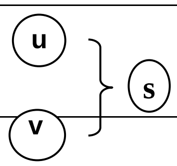
$(u_1,u_2,u_3) \in ℝ^3$.</td></tr>
<tr><td>“Teoremas em ação”:

- os vetores podem interagirem entre si, produzindo uma resultante;

- as operações entre vetores e entre vetores e escalares respeitam propriedades aritméticas;</td></tr>
</table>

Os “conceitos em ação” descritos correspondem a conceitos científicos, que serviram como parâmetro na investigação dos conceitos em ação[10] inferidos das produções dos alunos. Da mesma maneira, foram descritos os “teoremas em ação”, os quais consistem nas associações esperadas dos conceitos em ação por meio de proposições.

Para a análise dos teoremas em ação, como já mencionado, será utilizado o cálculo relacional. Fazendo o uso desse no exercício 8 tem-se:

8. Sejam $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3), \vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ e $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$. Resolva:
a) $\vec{u}-\vec{w}$
Cálculo Relacional
De cada componente de $\vec{u}$ é somado o oposto aditivo do valor da respectiva componente de $\vec{w}$, ou seja, $\vec{u}-\vec{w}=(u_1,u_2,u_3)+(-(w_1,w_2,w_3))=(u_1-w_1,u_2-w_2,u_3-w_3)=(s_1,s_2,s_3)=\vec{s}$, onde $\vec{s}$ é o vetor resultante.
Esquema


10 Os conceitos em ação da TCC correspondem a categorias de entendimento de um sujeito em ação diante de uma situação.

b) $3\vec{u}+\vec{v}$
Cálculo Relacional
Cada componente de $\vec{u}$ é multiplicada por 3 e adicionada ao valor da respectiva componente de $\vec{v}$, ou seja, $3\vec{u}=3(u_1,u_2,u_3)=(3u_1,3u_2,3u_3)$, com isso, $3\vec{u}+\vec{v}=(3u_1,3u_2,3u_3)+(v_1,v_2,v_3)=$ $=(3u_1+v_1,3u_2+v_2,3u_3+v_3)=\vec{s}$, onde $\vec{s}$ é o vetor resultante.
Esquema
1 $\rightarrow \vec{u}$ 3 $\rightarrow 3\vec{u}$
c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 3, determine $\vec{t}$.
Cálculo Relacional
Cada componente de $\vec{v}$ é o triplo das respectivas componentes de $\vec{t}$. Assim, para se determinar $\vec{t}$, tem-se $\vec{t}=\frac{1}{3}(v_1,v_2,v_3)=\frac{1}{3}(3t_1,3t_2,3t_3)=\frac{1}{3}3(t_1,t_2,t_3)=(t_1,t_2,t_3)$.
Esquema
1 $\rightarrow \vec{t}$ 3 $\rightarrow \vec{v}=3\vec{t}$
d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?
Cálculo Relacional
$\vec{w}$ é um múltiplo de $\vec{u}$. Podendo ser calculada essa quantidade como: $\vec{w}=k\vec{u}=(ku_1,ku_2,ku_3)=k(u_1,u_2,u_3);\vec{u}=(u_1,u_2,u_3))$ e $x=k$.
Esquema
1 $\rightarrow \vec{u}$ x $\rightarrow k\vec{u}$

O Quadro 3, refere-se ao conceito de vetor, de alguns participantes[11], deduzido de suas respostas.

Quadro 3 - Conceito de vetor dos alunos

Aluno 1	Conhecimentos em ação
Conceitos em ação	

11 Os oito alunos participantes da pesquisa foram denominados por Aluno1 ou A1, Aluno 2 ou A2 e assim por diante.

1. O que é vetor? O que não é vetor?

É um segmento orientado com sentido e direção. Um segmento qualquer não é um vetor.

8. Sejam $\vec{u} = (7,-4,3)$, $\vec{v} = (3,0,-9)$ e $\vec{w} = (28,-16,12)$. Resolva:

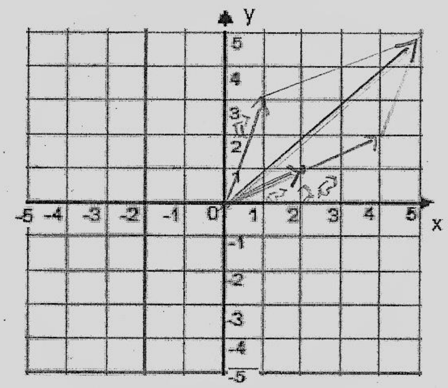
a) $\vec{u} - \vec{w}$ $\rightarrow \boxed{(-21, 12, -9)}$

Análise

É possível constatar que o aluno tem apenas uma noção sobre o que é vetor, sendo redundante quando diz que é um segmento orientado com sentido e direção. Mostra ter conhecimento da soma de vetores e do produto por escalar.

Teoremas em ação

7. Sejam $\vec{u} = (1,3)$ e $\vec{v} = (2,1)$. Represente os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $2\vec{v}$ e $\vec{u} + 2\vec{v}$ no plano cartesiano abaixo.



Análise

Pela questão 7 verifica-se que ele possui uma visão geométrica da adição de vetores e o produto de escalar por um vetor.

8. Sejam $\vec{u} = (7,-4,3)$, $\vec{v} = (3,0,-9)$ e $\vec{w} = (28,-16,12)$. Resolva:

b) $3\vec{u} + \vec{v}$

Cálculo Relacional

$\rightarrow (21,-12,9) + (3,0,-9) \rightarrow \boxed{(24,-12,0)}$

c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 3, determine $\vec{t}$.

Cálculo Relacional

$3\vec{t} = \vec{v}$

$\vec{t} = \frac{(3,0,-9)}{3} \rightarrow \boxed{\vec{t} = (1,0,-3)}$

d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?

Cálculo Relacional

4 vezes.

Análise

Pode-se depreender que o aluno reconhece que os vetores podem interagirem entre si, produzindo resultante. E que as operações entre vetores e escalar e vetores respeitam propriedades aritméticas.

Aluno 5 Conhecimentos em ação

Conceitos em ação

1. O que é vetor? O que não é vetor?

Vetor é um seguimento de reta direcionado e orientado. Não é reta, semi reta, um segmento, etc.

8. Sejam $\vec{u}=(7,-4,3)$, $\vec{v}=(3,0,-9)$ e $\vec{w}=(28,-16,12)$. Resolva:

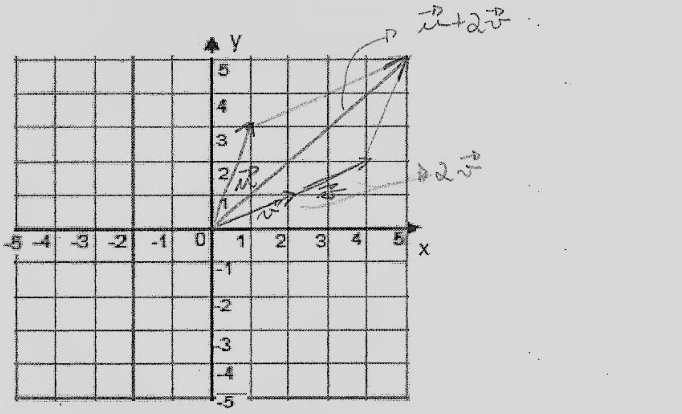
a) $\vec{u}-\vec{w}$ $\quad \vec{u}-\vec{w}=(7-28, -4-(-16), 3-12) = (-21, 12, -9)$

Análise

O aluno reconhece duas características de um vetor, mas ainda não tem clara a sua definição.
Mostra ter conhecimento da soma de vetores e do produto por escalar.

Teoremas em ação

7. Sejam $\vec{u}=(1,3)$ e $\vec{v}=(2,1)$. Represente os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $2\vec{v}$ e $\vec{u}+2\vec{v}$ no plano cartesiano abaixo.



Análise

Pela questão 7 verifica-se que ele possui uma visão geométrica da adição de vetores e o produto de escalar por um vetor.

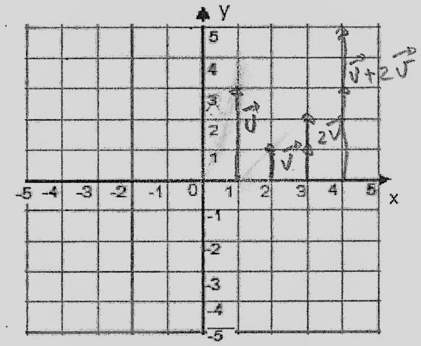
8. Sejam $\vec{u}=(7,-4,3)$, $\vec{v}=(3,0,-9)$ e $\vec{w}=(28,-16,12)$. Resolva:

b) $3\vec{u}+\vec{v}$

Cálculo Relacional

$3\vec{u}+\vec{v} = (3.7+3, 3(-4)+0, 3.3+(-9)) = (24, -12, 0)$

c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 3, determine $\vec{t}$.
Cálculo Relacional
$\vec{v} = \vec{t}.3 \Rightarrow \frac{\vec{v}}{3} = \vec{t}$ $\vec{t} = \left(\frac{3}{3}, \frac{0}{3}, \frac{-9}{3}\right) = (1,0,-3)$
d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?
Cálculo Relacional
$m = \left(\underset{\vec{u}x}{\overset{wx}{\frac{28}{7}}}, \underset{\vec{u}y}{\overset{wy}{\frac{-16}{-4}}}, \underset{\vec{u}z}{\overset{wz}{\frac{12}{3}}}\right) = (4,4,4)$ r $\vec{w} = 4.\vec{u}$
Análise
Pode-se deduzir que o aluno reconhece que os vetores podem interagirem entre si, produzindo resultante. E que as operações entre vetores e escalar e vetores respeitam propriedades aritméticas.

Aluno 7 Conhecimentos em ação
Conceitos em ação
1. O que é vetor? O que não é vetor? não me recordo do conceito de vetor 8. Sejam $\vec{u} = (7,-4,3)$, $\vec{v} = (3,0,-9)$ e $\vec{w} = (28,-16,12)$. Resolva: a) $\vec{u} - \vec{w}$ (7-3, -4, -6)
Análise
O aluno afirma não recordar do conceito e fez confusão entre os vetores envolvidos na letra a. Considerando a alteração der $\vec{w}$ por $\vec{v}$ o resultado mostra que ele tem conhecimento da soma de vetores e do produto por escalar.
Teoremas em ação
7. Sejam $\vec{u} = (1,3)$ e $\vec{v} = (2,1)$. Represente os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $2\vec{v}$ e $\vec{u} + 2\vec{v}$ no plano cartesiano abaixo. 
Análise

Nesse exercício, ele cometeu erros na representação, provavelmente, por não lembrar que os vetores deveriam ter origem na origem do plano cartesiano.

8. Sejam $\vec{u} = (7,-4,3)$, $\vec{v} = (3,0,-9)$ e $\vec{w} = (28,-16,12)$. Resolva:

b) $3\vec{u} + \vec{v}$

Cálculo Relacional

$(21, -12, 9) + (3, 0, -9) = (24, -12, 0)$

c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 3, determine $\vec{t}$.

Cálculo Relacional

$V = 3t \Rightarrow t = \frac{V}{3}$

d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?

Cálculo Relacional

$w = (28, -16, 12) \div (7, -4, 3) = 4 \Rightarrow$ é 4 vezes maior.

Análise

Na letra c, ele somente deixa indicado o vetor $\vec{t}$. Como ele conseguiu resolver a letra b corretamente, pode-se deduzir que na letra a ocorreu uma troca de vetores por falta de atenção. Assim, ele tem conhecimento da soma de vetores e do produto por escalar, mas tem dificuldade na representação geométrica.

Aluno 8 Conhecimentos em ação

Conceitos em ação

1. O que é vetor? O que não é vetor?

Vetor é um segmento orientado e a representação gráfica de segmentos equipolentes | Um segmento que não possui direção e sentido não é um vetor

2. O que são vetores equivalentes (iguais)? O que não são vetores equivalentes?

8. Sejam $\vec{u} = (7,-4,3)$, $\vec{v} = (3,0,-9)$ e $\vec{w} = (28,-16,12)$. Resolva:

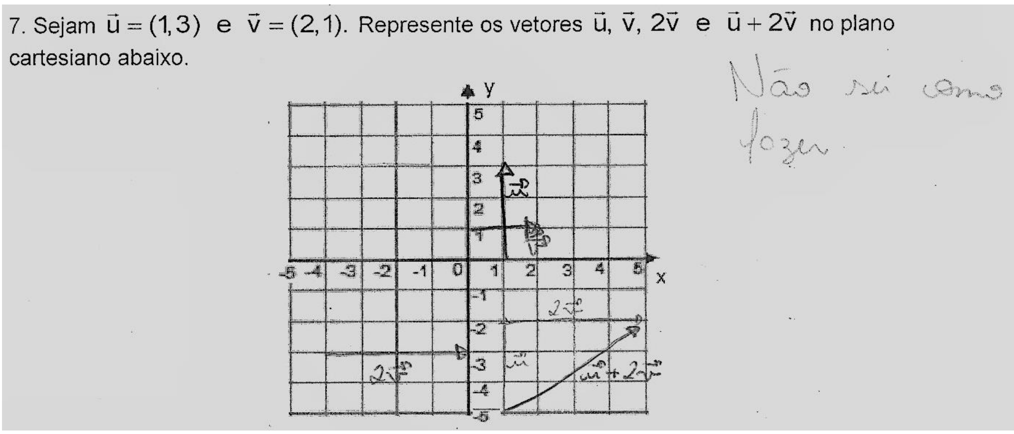
a) $\vec{u} - \vec{w}$ $(7, -4, 3) - (28 -16, 12)$

$(-21, +12, -9)$

Análise

O aluno demostra que tem uma ideia vaga sobre vetor, o que torna sua resposta confusa.
Mostra ter conhecimento da soma de vetores e do produto por escalar.

Teoremas em ação



Análise

O aluno demonstra limitação na representação dos vetores.

8. Sejam $\vec{u} = (7,-4,3)$, $\vec{v} = (3,0,-9)$ e $\vec{w} = (28,-16,12)$. Resolva:

b) $3\vec{u} + \vec{v}$

Cálculo Relacional

$3\vec{u} = 3(7,-4,3)$

$3\vec{u} = (21,-12,9)$

$3\vec{u} + \vec{v}$

$(21,-12,9) + (3,0,-9)$

$(24,-12,0)$

c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 3, determine $\vec{t}$.

Cálculo Relacional

$\vec{v} = 3 \cdot \vec{t}$

$(3,0,-9) = 3\vec{t}$

$\left(\frac{3,0,-9}{3}\right) = \vec{t}$

$\vec{t} = (1,0,-3)$

d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?

Cálculo Relacional

$\vec{u} = (7,-4,3) \times 4 = \vec{w} = (28,-16,12)$ 4 vezes

Análise

Ele resolveu adequadamente a letra c, que muitos alunos tiveram dificuldade. Nota-se que existe apenas uma dificuldade na representação geométrica.

É possível inferir que o conceito de vetor, para a maioria dos estudantes envolvidos na pesquisa, ainda não está claro e, em alguns casos, não está disponível na sua estrutura cognitiva. Isso compromete novas aprendizagens que necessitam desse conceito. Como afirmam Moreira e Masini (2001, p. 14)

> Novas idéias e informações podem ser aprendidas e retidas na medida em que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem para as novas idéias e conceitos.

Na questão 9 que pede para elaborar uma questão envolvendo vetores do $\mathbb{R}^2$ ou do $\mathbb{R}^3$ a maioria dos alunos não respondeu. Sendo que o aluno 7 escreveu "não consigo elaborar a questão". Essa questão tinha como objetivo verificar a capacidade de abstração do aluno. Não somente se ele conseguia transpor o conhecimento, que é um indicativo de aprendizagem, como também se conseguia criar algo sobre o que sabia. Apenas os alunos A1, A5 e A8 conseguiram elaborar a questão. Consultando a análise feita de cada aluno sobre o conceito de vetor, constata-se que A1 e A5 atenderam aos conhecimentos em ação esperados e o A8 apresentou somente uma dificuldade na representação geométrica, o que dá sinais de correlação entre os resultados.

Considerações finais

A presença da Álgebra Linear nos diversos âmbitos da matemática, a insatisfatória aprendizagem de seu conteúdo pelos alunos de cursos superiores (Celestino, 2000; Coimbra, 2008; Dorier, 2003) somadas às poucas investigações sobre o seu ensino e aprendizagem e ao reconhecimento que o conceito de vetor é a base para a sua compreensão, foram aspectos motivadores desta pesquisa.

A pergunta que norteou a pesquisa foi: "Qual a clareza e estabilidade do conceito de vetor na estrutura cognitiva dos alunos antes de iniciarem o estudo de espaços vetoriais?".

A TCC de Vergnaud foi o aporte teórico basilar da pesquisa. Ela funcionou como alicerce para a elaboração das atividades e para as análises e conclusões dos resultados obtidos. Pelos resultados, observou-se que ocorreu, em geral, aprendizagem. No entanto, notou-se a necessidade de uma maior variedade de atividades de forma a proporcionar ao aluno a possibilidade da utilização de diversas condutas e esquemas a fim de se constituir de maneira mais clara e estável o conceito de vetor em sua estrutura cognitiva. Naturalmente, uma maior quantidade de situações leva a uma maior tempo, para a compreensão em que consiste, pela óptica cognitiva, um conceito (Vergnaud, 1996).

Concluindo, com esta pesquisa, pretendeu-se contribuir à aprendizagem do conceito de espaço vetorial por meio da identificação, qualitativa, da clareza e estabilidade do conceito de vetor na estrutura cognitiva dos alunos e, além isso, inspirar professores a considerarem, previamente, o conhecimento dos alunos sobre vetores na elaboração de suas aulas e antes de iniciarem o estudo de espaços vetoriais.

Referências

Andreoli, D. I. (2009). *Análisis de los obstáculos en la construcción del concepto de Dependencia Lineal de vectores en alumnos de primer año de la universidad.* Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Instituto.

Anton, H.; Rorres, C. (2001). *Álgebra linear com aplicações.* 8. ed. Porto Alegre: Bookman.

Bogdan, R. C.; Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação. Tradução: Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista.* Porto: Porto Editora.

Cardoso, V. C. (2014). *Ensino e aprendizagem de álgebra linear: uma discussão acerca de aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais.* Universidade Estadual de Campinas.

Cardoso, V. C.; Kato, L. A.; Oliveira, S. R. DE (2013). Um estudo no campo conceitual de Vergnaud aplicado às matrizes : uma investigação acerca dos invariantes operatórios. *REVEMAT*, p. 95–116, dez.

Cardoso JR., G. D. DE; Aguiar JR., O. (2008). Os campos conceituais de Vergnaud como ferramenta para o planejamento didático. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 25, n. 2, p. 207–227.

Celestino, M. R. (2000). *Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear : as pesquisas brasileiras na década de 90.* PUC.

Coimbra, J. L. (2008). *Alguns Aspectos Problemáticos Relacionados ao Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear.* UFP.

Dorier, J. L. (2003). *Teaching linear algebra at university.* v. III, p. 10.

Franchi, A. (1999). Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: Alcântara Machado, S. D. et al. (1999) (Ed.). *Educação Matemática: uma introdução.* São Paulo: EDUC, p. 155–195.

Goldenberg, M. (2004). *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais.* 8ª ed. Rio de Janeiro: Record.

Grings, E. T. DE O.; Caballero, C.; Moreira, M. A. (2006). Possíveis indicadores de invariantes operatórios apresentados por estudantes em conceitos da termodinâmica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 28, n. 4, p. 463–471.

Machado, S. D. A.; Bianchini, B. L. (2012). A Álgebra Linear e a concepção de Transformação Linear construída por Estudantes de EAD. *Revemat : Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 7, n. 2, p. 69–89.

Moreira, M. A.; MasiniI, E. F. S. (2001). *Aprendizagem Significativa: a teoria de David Ausubel.* 2. ed. São Paulo: Centauro.

Vergnaud, G.(1988). Multiplicative structures (Eds.). *Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. In: Hiebert, H.; Behr, M. (Eds.), p. 141–161.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 10, n. 23, p. 133–170.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed). *Anais do 1 Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro.*, p. 1–26.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In: Guershon, H.; Confrey, J. (Eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.* Albany, N.Y.: State University of New York Press, p. 41–59.

Vergnaud, G. (1996). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. *Perspectivas,* n. 26(10), p. 195–207.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In Nunes, T. & Bryant, P. (Eds.). *Learning and teaching mathematics, an international perspective. Hove (East Sussex), Psychology Press Ltd.*

Vergnaud, G. (1998). A Mathematics, comprehensive theory of representation for Education. *Journal of Mathematical Behavior*, v. 2, n. 17, p. 167–181.

Vergnaud, G. (2014). *A Criança, a Matemática e a Realidade: Problemas do Ensino da Matemática na Escolar Elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares.* Curitiba: Editora da UFPR.