ENSINO DE DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL E TRINOMIAL UTILIZANDO COMO MOTIVAÇÃO O CAMPEONATO BRASILEIRO DE FUTEBOL

Binomial and Trinomial Distribution Teaching Using the Brazilian Football Championship as Motivation

Lúcio Ângelo Vidal (lucio.vidal@ifmt.edu.br)
Rua Professora Zulmira Canavarros, nº 95 – CEP: 78005-200, Centro, Cuiabá – MT
IFMT Campus Cuiabá
Andreia da Silva Tavares (andreia.physical@gmail.com)
Avenida Dom Orlando Chaves, 2665 – Cristo Rei, Várzea Grande – MT, 78118-000

Recebido em: 19/03/2022
Aceito em: 25/09/2022

Resumo

O objetivo deste trabalho foi ensinar a nove discentes do curso de Engenharia, através de um minicurso, a distribuição binomial e trinomial utilizando como motivação a probabilidade média do número de vitórias, empates e derrotas do time mandante no campeonato brasileiro de futebol da primeira divisão. Para a realização do objetivo, foram utilizados dados estatísticos elaborados a partir do histórico dos torneios ocorridos entre os anos de 2006 e 2019, um questionário de sondagem de conhecimentos prévios e um teste de verificação após a ação pedagógica. O resultado com o pós-teste mostra que a maior parte dos estudantes que o realizaram conseguiram resolver corretamente mais da metade dos problemas propostos.

Palavras-chave: distribuição multinomial; esporte; probabilidade

Abstract

The objective of this work was to teach nine students of the Engineering course, through a mini-course, the binomial and trinomial distribution using as motivation the average probability of the number of victories, draws and defeats of the home team in the Brazilian soccer championship of the first division. To achieve the objective, statistical data drawn from the history of tournaments that took place between 2006 and 2019, a survey questionnaire for prior knowledge and a verification test after the pedagogical action were used. The result with the post-test shows that most of the students who took it were able to correctly solve more than half of the proposed problems.

Keywords: multinomial distribution; sport; probability

Introdução

Chama-se *experimento determinístico* aquele cujo resultado pode ser previsto antes de acontecer e de *experimento aleatório* os que não se pode prever antes de se realizar (IEZZI et al, 1990). Por não se saber o resultado do segundo tipo de experimento, só resta descobrir a chance de ocorrer cada um dos resultados possíveis.

No ensino de probabilidades, é muito comum se destacar a importância de sua compreensão a partir de jogos, cita-se a seguir alguns trabalhos neste sentido. Hurtado e Costa (1999), por exemplo, sugerem a utilização de materiais como moedas, baralhos, urnas além de jogos de loteria e do bicho por fazerem uma correspondência direta do ensino com a realidade. Ricardo (2016), por sua vez, realiza uma proposta didática com uma adaptação do jogo do bingo. Finalmente, Nunes (2015) sugere uma metodologia de ensino baseada em jogos lotéricos com atividades pedagógicas diferenciadas no sentido de motivar e facilitar o aprendizado de alunos do ensino Médio.

Quando se trata mais especificamente do ensino de distribuição binomial, há um trabalho, por exemplo, que desenvolve uma sequência didática que favoreça seu aprendizado do tema com alunos que cursam Administração de Empresas (SOUZA, 2002); existe outro que aborda um experimento de ensino para sete alunos de Engenharia visando explorar relações entre registros de representação semiótica com o auxílio do software R (NETO; KARRER; KATAOKA; 2012) e por fim, um que aborda o ensino de distribuição binomial para doze alunos de Ensino médio a partir de dados de probabilidade real de ocorrência de chuva mensal (VIDAL et al, 2020).

O que se observa como lacuna são trabalhos focados no ensino de distribuição trinomial, binomial ou de ambas direcionadas ao futebol. Dessa forma, aqui está a importância do tema proposto no presente trabalho.

Este artigo tem como objetivos: a) motivar os discentes ao aprendizado de distribuição binomial e trinomial com uma série histórica obtida de resultados do campeonato brasileiro da primeira divisão; b) observar o conhecimento prévio que os alunos trazem consigo sobre análise combinatória e probabilidade; c) ensinar os conceitos que envolvem distribuição binomial e trinomial através de uma aula; d) avaliar se o ensinamento foi efetivo.

Fundamentação Estatística

Aqui far-se-á uma abordagem de conceitos matemáticos que dão suporte para o entendimento da distribuição binomial e sua expansão para o caso trinomial (fatorial, combinação, probabilidade, distribuição binomial, distribuição trinomial e probabilidade de vitória, empate e derrota no campeonato brasileiro do time anfitrião).

a) Fatorial

Define-se o conceito de fatorial de um número n inteiro positivo a fim de simplificar a maneira de calcular o número de arranjos, permutações e combinações em análise combinatória (HAZZAN, 1991). Assim, tem-se a equação 1:

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \quad (1)$$

lê-se: n fatorial é igual a n vezes n menos um vezes n menos dois vezes n menos três e assim por diante vezes três vezes dois vezes um.

b) Combinação

Se um conjunto tem n elementos, os subconjuntos desse conjunto com p (p menor ou igual a n) elementos constituem grupos denominados de combinações de n elementos p a p (IEZZI et al, 1990). Matematicamente, tem-se a equação 2:

$$Cn, p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \quad (2)$$

A combinação de n elementos tomados p a p ainda pode se apresentar como o binomial de n sobre p como se representa na equação 3:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} \quad (3)$$

c)Probabilidade

A sistematização da teoria das probabilidades foi patrocinada por apostadores do século XIX. Posteriormente, cientistas concluiriam que alguns eventos científicos também envolviam probabilidades (NAVIDI, 2012).

Em qualquer circunstância que ocorrem vários resultados, a teoria das probabilidades apresenta maneiras de se quantificar as chances de ocorrer um determinado resultado (DEVORE, 2013).

Antes de definir matematicamente o conceito de probabilidade, devem-se definir os conceitos de espaço amostral e evento. O primeiro é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento casual e o segundo é um conjunto qualquer de resultados do mesmo experimento (IEZZI et al, 1990).

Dessa forma, a probabilidade de acontecer um determinado evento é, portanto, o número de resultados do evento pelo número de possibilidades do espaço amostral.

d)Distribuição Binomial

De acordo com Spiegel e Stephens (2009), se p é a probabilidade de acontecer o “sucesso” de um evento em um experimento único e q é a probabilidade de “fracasso” de ocorrência também em um único experimento de forma que p + q = 1, então a probabilidade de o evento ocorrer X vezes em n tentativas é dada pela relação:

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad (4)$$

A distribuição binomial é muito importante, por exemplo, no que diz respeito às aproximações com as distribuições normal e de Poisson.

No primeiro caso, ocorre quando o produto entre o número de tentativas e o número de fracassos ou sucessos é maior ou igual a 5 e se torna melhor quando o número de tentativas é igual ou superior a trinta (COSTA, 2005). Entretanto, como menciona Costa (2005) cabe sempre ressaltar que a distribuição normal é sempre aproximada e que a binomial, por sua vez, é exata.

Na segunda situação, acontece quando o número de tentativas é muito grande e a probabilidade de fracasso ou sucesso estão perto de zero ou um de forma que se a probabilidade de sucesso está perto de zero, a probabilidade de fracasso está perto de um e vice-versa.

e) Distribuição trinomial

De forma análoga à distribuição binomial, é possível definir a distribuição trinomial. Imagine que seja p, q e r as probabilidades de ocorrem um certo inverto de forma que a soma p + q + r seja igual a 1. Além disso, os números de ocorrências desses eventos são respectivamente iguais a x, y e z de forma que x + y + z = N. Então, a probabilidade de ocorrerem é de:

$$\mathrm{Prob}(x, y, z) = \frac{N!}{x!\, y!\, z!} p^x q^y r^z \quad (5)$$

f) Probabilidade de vitória, empate ou derrota no campeonato brasileiro do time anfitrião

As probabilidades apresentadas na tabela 1 foram desenvolvidas a partir de informações coletadas na internet sobre os campeonatos brasileiros da primeira divisão em cada ano no tocante ao número total de vitórias, empate e derrotas dos times anfitriões.

O cálculo foi realizado observando a quantidade de empates, vitórias e derrotas do time “da casa” ao longo de todo o campeonato e dividindo-se pelo número de partidas totais (380).

A escolha do período entre 2006 e 2019 ocorreu porque a partir de 2006, o campeonato foi disputado por vinte times e com trinta e oito rodadas com dez jogos em cada uma delas. Em outras palavras, há uma igual quantidade de partidas nesses anos.

Tabela 1. Probabilidade de vitória, empate ou derrota do time mandante entre 2006 e 2019 no campeonato brasileiro série A com dois algarismos significativos.

Ano	Vitória	Empate	Derrota
2006	0,50	0,25	0,25
2007	0,51	0,23	0,26
2008	0,55	0,25	0,20
2009	0,51	0,27	0,22
2010	0,47	0,31	0,22
2011	0,48	0,27	0,25
2012	0,48	0,27	0,25
2013	0,48	0,28	0,24
2014	0,52	0,24	0,24
2015	0,52	0,24	0,24
2016	0,53	0,24	0,23
2017	0,44	0,27	0,29
2018	0,53	0,29	0,18
2019	0,48	0,26	0,26
Média	0,50	0,26	0,24

As fórmulas para se calcular a probabilidade média de a equipe da casa de vencer, empatar e perder ao final do campeonato, na perspectiva da distribuição binomial, são respectivamente exibidas nas equações 6, 7 e 8:

$$\mathrm{Prob(V)} = \binom{380}{x} (0{,}50)^{x}\, (0{,}50)^{380-x} \quad (6)$$

$$\mathrm{Prob(E)} = \binom{380}{x} (0{,}26)^{x}\, (0{,}74)^{380-x} \quad (7)$$

$$\mathrm{Prob(D)} = \binom{380}{x} (0{,}24)^{x}\, (0{,}76)^{380-x} \quad (8)$$

onde x é o número de “sucessos” esperados.

Por outro lado, no viés de uma distribuição trinomial, a probabilidade média de ocorrer exatamente x vitórias, y empates e z derrotas da equipe mandante é mostrada na equação 9:

$$\mathrm{Prob}(x, y, z) = \frac{380!}{x!\,y!\,z!} (0{,}50)^{x} (0{,}26)^{y} (0{,}24)^{z} \quad (9)$$

Materiais e Métodos

O minicurso *Distribuição Binomial e Trinomial para prever o resultado do campeonato brasileiro* ocorreu no dia 6 de setembro de 2021 com inicialmente nove estudantes do curso de Engenharia de uma instituição pública de ensino superior entre 18h e 21h de forma remota via Google Meet em virtude da pandemia de COVID-19.

Durante a interação, houve nos quinze minutos iniciais uma apresentação das probabilidades calculadas pelo docente em uma planilha do Microsoft Excel referentes à vitória, ao empate ou à derrota no campeonato brasileiro da primeira divisão entre os anos de 2006 e 2019 calculadas a partir do número total de vitórias, empates e derrotas do time mandante dividido pelo número total de partidas (380) no campeonato de cada ano.

Ainda no primeiro quarto de hora, o aluno H perguntou se o time mandante era o que estava jogando em casa e o docente respondeu que sim. Em seguida, o professor mostrou que a maior probabilidade era de vitória do time anfitrião e o aluno F, por sua vez, afirmou que até hoje os mandantes normalmente vencem devido ao peso do fator torcida.

Em seguida, foi compartilhado um teste na tela do Google Meet composto de cinco questões abertas referentes a problemas de análise combinatória e probabilidade (pré-teste) com um tempo de quarenta e cinco minutos para ser resolvido a fim de se identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre análise combinatória e probabilidade e que dão suporte ao aprendizado de distribuição polinomial. Não era necessário chegar ao valor numérico da resposta, bastava a representação matemática conveniente. Eis o pré-teste aplicado com as respostas consideradas corretas para cada questão:

Teste de conhecimento de análise combinatória e de probabilidade (Pré-Teste)

1. *De quantas maneiras podemos organizar em uma prateleira quatro livros distintos?*
   respostas consideradas corretas: 24; 4!; 4.3.2.1

2. *Quantas comissões distintas de 2 professores podemos formar com 5 professores?*
   respostas consideradas corretas: 10; $C_{5,2} = \binom{5}{2}$; $\frac{5!}{2!3!}$

3. *Lança-se uma moeda não viciada 5 vezes para cima e observa-se o resultado. Qual é a probabilidade de obtermos 5 caras?*
   Respostas consideradas corretas: aproximadamente 0,031; $\frac{1}{2.2.2.2.2}$

4. *A probabilidade de ocorrência de chuva em uma cidade em um certo mês de 30 dias é de 0,7. Qual é a probabilidade de ocorrerem exatamente 2 dias de chuva nesse mês. Considere que apenas a situação de chover e não chover são as possíveis em um dia.*
   Respostas consideradas corretas: $\binom{30}{2}(0{,}7)^2(0{,}3)^{28}$; *aproximadamente* $4{,}88.10^{-13}$

5. *Em um campeonato disputado por 4 times de futebol em jogos de ida e volta ao longo de muitos anos, só é possível três resultados possíveis para os times mandantes: vitória, empate e derrota. Sabe-se que a probabilidade média de o mandante vencer é 0,5; de empatar é 0,3 e de perder é 0,2. Qual é probabilidade média de ocorrerem 11 vitórias e 1 empate do mandante?*
Respostas consideradas corretas: $\frac{12!}{11!1!0!}(0{,}50)^{11}(0{,}3)^{1}(0{,}2)^{0}$*; aproximadamente 0,00176.*

Ainda em relação ao pré-teste, justificam-se as questões de um a cinco pelos fatos a seguir: a questão de número 1, por exemplo, buscava analisar se os discentes eram capazes de aplicar o princípio multiplicativo da análise combinatória. Na questão de número dois, desejava-se saber se os estudantes compreendiam o conceito de combinação. A questão de número três procurava descobrir se eles sabiam calcular probabilidade. As questões de número quatro e cinco visavam observar se os aprendizes já dispunham de conhecimento de cálculo de probabilidade por meio de distribuição binomial e trinomial respectivamente.

Após o pré-teste, o professor realizou uma explanação escrevendo textos e equações, com o auxílio do Microsoft Word, em uma hora e meia sobre os tópicos fatorial, combinação, distribuição binomial, distribuição trinomial com exemplos de cada tópico além de deduzir as equações de número 6, 7 e 8 (referentes à probabilidade média de ocorrência de vitória, empate e derrota do time da casa em uma perspectiva binomial para o campeonato brasileiro) e a equação 9 (ligada ao viés trinomial de se saber exatamente quantas vitórias, empate e derrotas terão o time anfitrião).

Ainda durante a explanação docente, o aluno I indagou se a probabilidade de fracasso na distribuição binomial era a probabilidade de dar errado. O docente corrigiu dizendo que era probabilidade de não se obter exatamente o que se deseja.

O aluno H, por sua vez, perguntou sobre por que razão se colocava na fórmula da expansão trinomial o fatorial no numerador e denominador e foi esclarecido que era resultado de uma expansão do termo geral. No final da explanação, novamente H indaga sobre o fato de os termos que estão no denominador da distribuição trinomial somados são iguais ao valor de tentativas e o professor confirma o fato.

Por fim, totalizando as três horas de interação, os discentes resolveram um teste também compartilhado na tela do Google Meet com cinco questões abertas em trinta minutos acerca de distribuição binomial e trinomial (pós-teste) para analisar o que foi absorvido durante a interação. Novamente não era necessário chegar à resposta numérica, bastava indicar por uma expressão matemática. Eis o pós-teste aplicado com as respostas consideradas corretas:

Teste de conhecimentos sobre distribuição binomial e trinomial (Pós-Teste)

1. *Imagine que a probabilidade de ocorrer uma trovoada em um dia qualquer de um mês com 30 dias seja 0,1. Qual é a probabilidade de ocorrerem apenas dois dias de trovoada neste mês?*

Resposta considerada correta: $\binom{30}{2}(0,1)^2(0,9)^{28}$ *ou o valor numérico esta expressão*

2. *Um campeonato é disputado há vários anos com 8 times em jogos de ida e volta. Sabe-se que a probabilidade média de o mandante vencer é de 0,5; de empatar é 0,3 e de perder é 0,2. Qual é a probabilidade média de ocorrerem exatamente 40 vitórias, 10 empates e 6 derrotas do mandante?*

   Resposta considerada correta: $\frac{56!}{40!10!6!}(0,5)^{40}(0,3)^{10}(0,2)^6$*ou o valor numérico desta expressão*

3. *Dois ambientes são separados por uma parede móvel. De um lado, há 20 moléculas de um gás. Em um certo momento, a parede é removida. Sabendo que a probabilidade de uma molécula estar em uma das metades do ambiente novo e único é de 0,5; determine a probabilidade de encontrarmos 5 moléculas de um lado e as demais no outro.*

   Resposta considerada correta: $\binom{20}{5}(0,5)^5(0,5)^{15}$*ou o valor numérico desta expressão*

4. *Imagine que a probabilidade de ocorrer uma rajada de vento em um dia qualquer de um mês com 31 dias seja 0,1. Qual é a probabilidade de ocorrerem no máximo dois dias de rajada de vento neste mês?*

   Resposta considerada correta: $\binom{31}{0}(0,1)^0(0,9)^{31}+\binom{30}{1}(0,1)^1(0,9)^{30}+$ $+\binom{31}{2}(0,1)^2(0,9)^{29}$*ou o valor numérico desta expressão*

5. *Imagine que em um quadrangular de acesso a uma determinada série do campeonato brasileiro, 4 clubes se enfrentem em jogos de ida e volta. A probabilidade de o mandante vencer é de 0,6; de empatar é 0,3 e de perder é de 0,1. Determine a probabilidade de o mandante vencer pelo menos 11 partidas.*

   Resposta considerada correta: $\frac{12!}{11!1!0!}(0,6)^{11}(0,3)^1(0,2)^0+$ $+\frac{12!}{11!0!1!}(0,6)^{11}(0,3)^0(0,2)^1+\frac{12!}{12!0!0!}(0,6)^{12}(0,3)^0(0,2)^0$ *ou o valor numérico desta expressão.*

As questões de um a três abordavam o conceito direto e as questões 4 e 5 serviam para levar em conta interpretação de texto. As áreas de conhecimento abordadas no pós-teste versavam sobre ocorrência de eventos meteorológicos, entropia de configuração e esportes.

Resultados e Discussão

Analisando a tabela de número 2, nota-se, no que diz respeito ao desempenho de cada aprendiz no pré-teste que os alunos A, G, H e I não acertaram nenhuma questão; os discentes B e C acertaram a resolução de apenas uma questão e os estudantes D, E, F tiveram dois acertos cada.

No tocante ao pós-teste, A, F e G não o responderam; E não acertou nenhuma das cinco questões; quatro alunos (B, C, D e H) responderam corretamente 3 questões e apenas um conseguiu acertas todas as questões.

Observa-se ainda que inicialmente um total nove discentes participaram do pré-teste apenas seis realizaram o pós-teste. Dos seis estudantes que fizeram o pós-teste, a maioria (cinco) acertou pelo menos 60% dos problemas propostos. Além disso, a média de acertos no pré-teste por estudante foi de aproximadamente 0,89 (8 dividido por 9) ao passo que a média de acertos no pós-teste foi de aproximadamente 2,83 (18 dividido por 6).

Tabela 2. Quantidade de Acertos por Discentes Antes e Após a Explanação aos Alunos.

Aluno	Desempenho no Pré-Teste	Desempenho no Pós-Teste
A	nenhum acerto	não fez
B	1 acerto	3 acertos
C	1 acerto	3 acertos
D	2 acertos	3 acertos
E	2 acertos	nenhum acerto
F	2 acertos	não fez
G	nenhum acerto	não fez
H	nenhum acerto	5 acertos
I	nenhum acerto	3 acertos
TOTAL	8 acertos	17 acertos

Analisando a tabela 3, referente ao pré-teste, observa-se que quatro alunos conseguiram acertar a primeira questão que seria teoricamente a mais fácil; três responderam corretamente à questão de número dois; apenas um acertou a questão de número três e nenhum dos discentes conseguiu resolver corretamente as questões quatro e cinco.

Pelo resultado obtido na tabela 3, o que se supõe é a existência de conhecimento prévio de quatro alunos do conceito de permutação, três alunos detêm o conhecimento de combinação e que um aluno tem uma noção do cálculo de probabilidade. Porém, observa-se devido ao fato de nenhum deles acertado as questões de número 4 e 5 que nenhum deles provavelmente tinha conhecimento de distribuição binomial e trinomial.

Tabela 3. Quantidade de Acertos por Questão no Pré-Teste.

Número da Questão	Quantidade de Alunos que acertaram
1	4
2	3
3	1
4	0
5	0
Total	8

A tabela 4 apresenta, referente ao pós-teste, mostra que cinco alunos acertaram as questões de números um, dois e três; apenas um estudante acertou a questão de número quatro e apenas um acertou a questão cinco.

O resultado expresso na tabela citada no parágrafo anterior sugere que os discentes tiveram mais facilidade no cálculo de probabilidade quando na questão não estava explícita a locução *no máximo* ou *pelo menos* como no caso das questões quatro e cinco respectivamente, ou seja, pode ter sido não apenas uma dificuldade na interpretação matemática, mas um problema de interpretação de texto.

Tabela 4. Quantidade de Acertos por Questões Após a Explanação aos Alunos.

Número da Questão	Quantidade de Alunos que acertaram
1	5
2	5
3	5
4	1
5	1
Total	17

Considerações Finais

Neste artigo, foi possível ver a dinâmica com os aprendizes de Ensino Superior no ensino de distribuição binomial e trinomial objetivando o aprendizado desses conceitos tendo como motivação dados estatísticos oriundos do campeonato brasileiro de futebol da primeira divisão.

As formulações para o cálculo do resultado final do campeonato brasileiro sejam na perspectiva de distribuição binomial ou trinomial apresentadas nas equações de 6 a 9 neste trabalho devem ser vistas como algo mutável ao longo do tempo, pois podem surgir novas variáveis no futebol que levem a mudanças nas atitudes dos jogadores duelos ao longo dos anos.

A apresentação inicial dos dados coletados do histórico do campeonato brasileiro procurou estimular a curiosidade dos aprendizes e o questionário do pós-teste buscou inserir o aluno em áreas distintas do conhecimento e representou situações que tinham um contexto de problemas reais. Dessa forma, aparecem aqui dois aspectos pertinentes ao ensino com pesquisa.

A amostra inicial de apenas nove alunos pode ser justificada no cenário de pandemia de COVID-19. Assim, o discente não tem muita motivação para fazer atividades fora de seu horário habitual de aulas. Possivelmente, se o mesmo evento fosse marcado no horário de aula, conseguir-se-ia uma amostra de tamanho maior.

Para futuros trabalhos, sugere-se que se façam trabalhos de cálculo de probabilidade de vitória, empate e derrota de times anfitriões ao término do campeonato também em outras disputas, tais como Brasileiro série B, Copa do Brasil, Estaduais, Libertadores da América.

Referências

Costa, S. F. (2005). *Introdução Ilustrada à Estatística*. 4ª edição. Editora Harbra, São Paulo.

Devore, J. L. (2013). *Probabilidade para Ciências Engenharia e Ciências*. Editora Cengage Learning, 6ª edição, São Paulo.

Hazzan, S. (1991). *Fundamentos da Matemática Elementar volume 5*. 5ª edição, Editora Atual, São Paulo.

Hurtado, N. H.; Costa, J. F. S. (1999) A Probabilidade no Ensino Médio: A Importância dos Jogos como Ferramenta Didática. Atas da Conferência Internacional "Experiências e Expectativas do Ensino de Estatística - Desafios para o Século XXI". Florianópolis, Santa Catarina, Brasil - 20 a 23 de Setembro de 1999. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Jose-Fabiano-Serra-Costa/publication/280100995_A_Probabilidade_no_Ensino_Medio_A_Importancia_dos_Jogos_como_Ferramenta_Didatica/links/5ec0e75ba6fdcc90d67a7deb/A-Probabilidade-no-Ensino-Medio-A-Importancia-dos-Jogos-como-Ferramenta-Didatica.pdf.

Iezzi, G.; Dolce, O.; Teixeira, J.C; Machado, N.J.; Goulart, M.C.; Castro, L. R. S.; Machado, A.S. (1990). *Matemática 2ª Série do 2°grau*. 8ª edição, Atual Editora S.A. São Paulo.

Navidi, W. (2012). *Probabilidade e Estatística para Ciências Exatas*. Ed. Mc Graw Hill, Porto Alegre.

Neto, P. M. C.; Karrer, M.; Kataoka, V. Y. (2012). Distribuição Binomial: um experimento de ensino envolvendo relações entre registros de representações semióticas no ambiente R. *BOLETIM GEPEM, N° 60, jan/jun. 2012, p.109-127*. Disponível em: https://scholar.archive.org/work/4eaglzraqvcgtdyio7ohkqye6m/access/wayback/http://doi.editoracubo.com.br/10.4322/gepem.2014.006.

Nunes, V. A. (2015). A utilização dos jogos lotéricos para o ensino de Probabilidade no Ensino Médio. Dissertação de Mestrado. UFRRJ. Disponível em: https://tede.ufrrj.br/handle/jspui/1781.

Ricardo, A. C. K. (2016). O Uso de Jogos no Ensino de Probabilidade na Educação Básica. Tabalho de Conclusão de Curso da Universidade Federal de São João Del-Rei – UFSJ Núcleo de Educação à Distância. Disponível em: http://dspace.nead.ufsj.edu.br/trabalhospublicos/handle/123456789/56.

Souza, C. A. (2002) A distribuição binomial no ensino superior. 153 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11230.

Spiegel, m. R.; Stephens, L. J. (2009). *Estatística*. Coleção Schaum. Editora Bookman, Porto Alegre.

Vidal, L.A.; Lima, G. F.; Rosa, F. A.; Tavares, A. S. (2020). Melhorando o Aprendizado de Probabilidade na Distribuição Binomial através do Número de Dias de Precipitação

Mensal em Cuiabá. *Experiências em Ensino de Ciências V.15, No.2. p501-512*. https://fisica.ufmt.br/eenciojs/index.php/eenci/article/view/737.