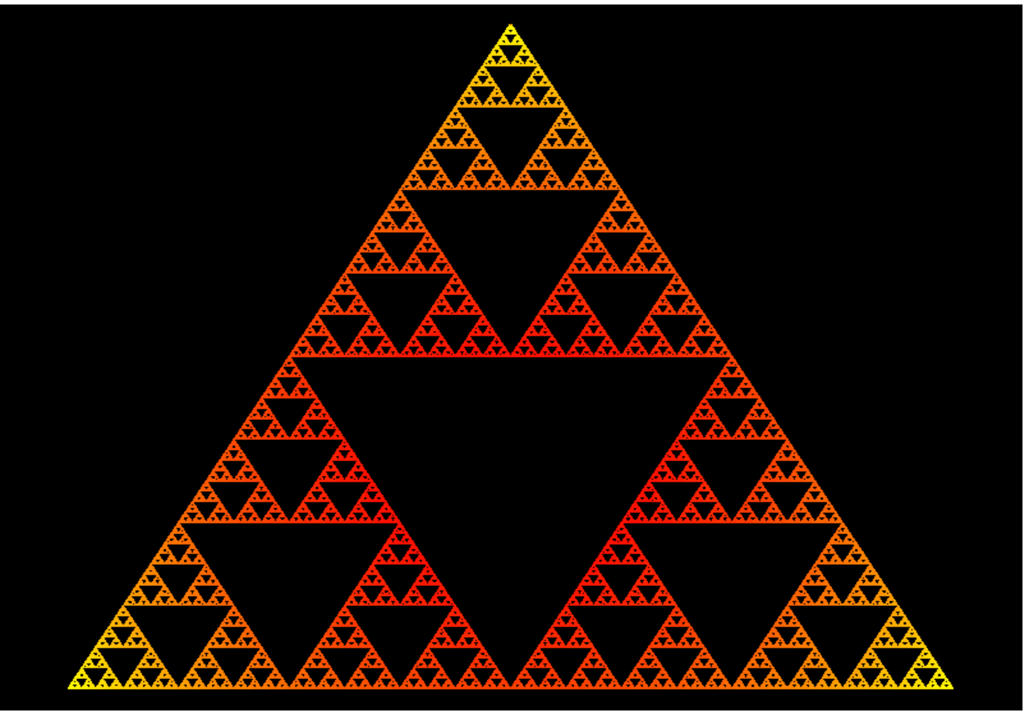
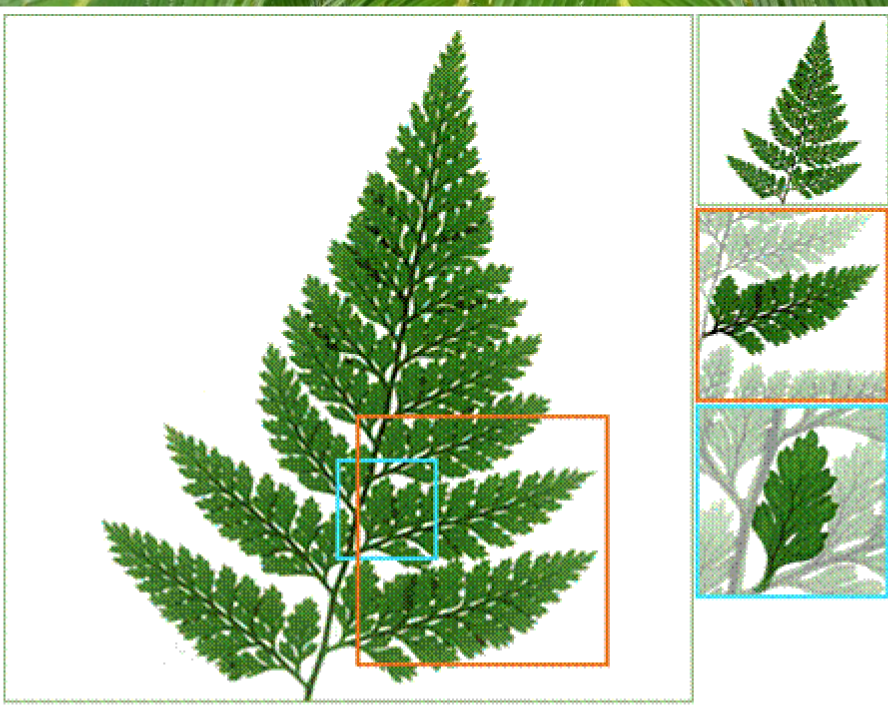


# 2016

# FRACTAL – A GEOMETRIA DA NATUREZA APLICADA AO ENSINO MÉDIO NO ENSINO DE FÍSICA



SÉRGIO ROBERTO DE PAULO

JOSEMY BRITO DA SILVA

UFMT PPECN

Programa de Pós-Graduação em
Ensino de Ciências Naturais
Universidade Federal de Mato-Grosso

# FRACTAL – A GEOMETRIA DA NATUREZA APLICADA AO ENSINO MÉDIO NO ENSINO DE FÍSICA.


AUTORES

Pr. Dr. Sérgio Roberto de Paulo
UFMT\PPECN

Mestrando Josemy Brito da Silva
UFMT\PPECN

# Apresentação

O presente trabalho visa fazer uma abordagem dos fractais, no ensino de física, em especial no ensino médio.

Partindo da apresentação da Teoria da Complexidade, como uma nova ciência e dentro desta nova ciência, a Geometria Fractal ou Geometria da Natureza. Iremos descobrir objetos empolgantes com suas belezas, que encontramos em nosso dia a dia e não percebemos.

## SUMÁRIO

## TEORIA DA COMPLEXIDADE.

A geometria fractal faz parte de um desdobramento recente na ciência, que é a Teoria da Complexidade, que traz uma nova perspectiva de visão de mundo e de ciência, que vai além dos limites estabelecidos pela ciência cartesiana.

A física clássica de Isaac Newton até o século XIX, estabelecia uma exata correspondência entre causa e efeito.

Os cientistas tinham certeza de ser capazes de reduzir até as mais complicadas situações a interações de umas poucas leis simples e de, assim prever o comportamento dos mais complexos sistemas ao longo do tempo.

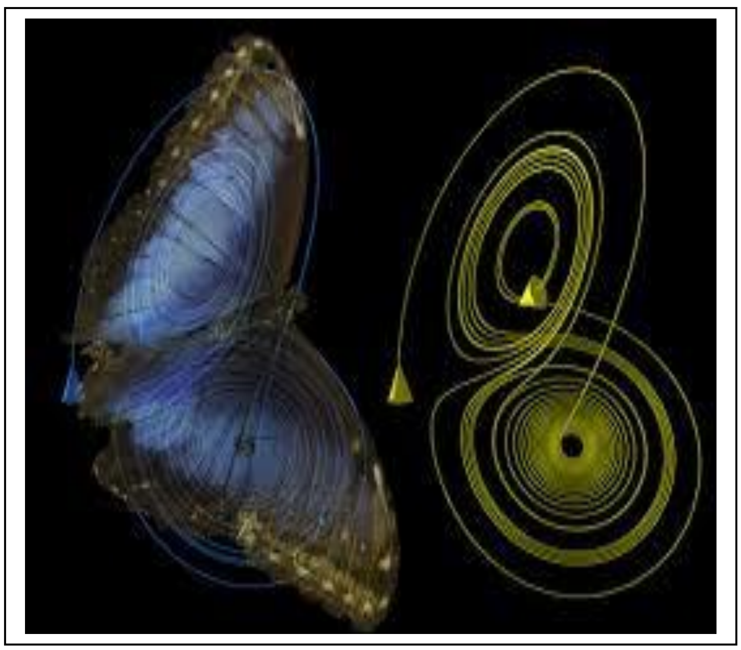
O modelo de emissão de radiação postulado por Max Planck, em seu revolucionário trabalho sobre a teoria quântica, publicado em 1900, e o do universo proposto pouco depois em 1905, por Albert Einstein, na famosa Teoria da Relatividade, mostraram que, nos extremos do muito grande e do muito pequeno, as leis de Newton, um dos pilares da Física Clássica, não funcionavam.

Longe de ser previsível como um mecanismo de relojoaria, a natureza nos aparecia agora aleatória como um lance de dados.

Mais recentemente, a ciência entendeu essa mensagem de incerteza e imprevisibilidade ao mundo do dia-a-dia. A teoria do Caos e, mais recentemente, a Teoria da Complexidade são termos genéricos pelos quais ficou conhecido o novo modelo de funcionamento das coisas.

O principal catalizador da Teoria do Caos foi o trabalho do meteorologista Edward Lorenz, do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT). No inicio da década de 60, Lorenz desenvolveu um modelo que simulava no computador a evolução das condições climáticas. Dados os valores iniciais de ventos e temperaturas, o computador fazia uma simulação da previsão do tempo (CAPRA, 2006).

Lorenz imaginava que pequenas modificações nas condições iniciais acarretariam alterações na evolução do quadro como um todo.



Qual foi sua surpresa ao descobrir que mudanças infinitesimais nas entradas poderiam ocasionar alterações drásticas nas condições futuras do tempo.

Nessa perspectiva foi possível inferir que uma leve brisa em Nevada, a queda de 1 grau na temperatura em Massachusetts, o bater de asas de uma borboleta na Califórnia podiam causar um furacão na Florida um mês depois.

Da previsão do tempo, das colônias de cupins à Internet, a constatação de que mudanças diminutas podem acarretar desvios radicais no comportamento de um sistema veio reforçar a nova probabilidade da Física.

O comportamento dos sistemas físicos, mesmos os relativamente simples, tem uma componente de imprevisibilidade.

A ideia de que a natureza seja fundamentalmente aleatória vai contra nossa intuição.

Mas segunda constatação e ainda estranha: há padrões, regularidades por trás dos comportamentos aleatórios dos sistemas físicos mais complexos, como a atmosfera ou mar.

Na verdade, o estado final de um sistema não é um ponto qualquer; certos percursos parecem ter mais sentido que outros – ou, pelo menos, ocorrem com muito maior frequência.

Os estudiosos os chamam de atratores estranhos (strange attractors). Eles permitem que os cientistas prevejam o estado mais provável de um sistema, embora não quando precisamente ele vá ocorrer. (CAPRA, 2006).

È o que acontece com a previsão do tempo ou um maremoto, por exemplo. De acordo com a dimensionalidade de um atrator de uma variável, podemos classifica-la em periódica, semi-periodica e caótica se seus atratores tiverem dimensões inferior a dois, dois e acima de dois respectivamente (NICOLIS&PRIGOGINE, 1998).

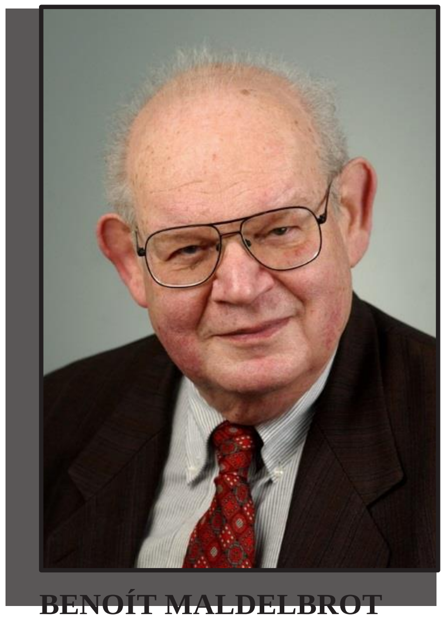
Uma vez que a teoria da Complexidade ainda é uma novidade dentro da academia, pesquisas a respeito de como ensiná-la e divulga-la são importantes na área de Ensino.

Atividades

Leitura de Livro e reumo: *A Teia da* é um livro de ecologia escritopor Fritjof Capra em 1996, lançado pela editora Cultrix. O livro propõe a visão de uma interligação ecológica de todos os eventos que ocorrem na Terra.

Visite o site (http://www.teoriadacomplexidade.com.br/teoria-da-complexidade.html), site do Professor Julio Tôrres.

# A GEOMETRIA FRACTAL



BENOÍT MALDELBROT

A geometria fractal trata dos conjuntos ou estruturas fractais. Surge em meados dos anos 60 e 70 quando os primeiros atratores estranhos estavam sendo estudados. Os fractais são conjuntos cuja forma é extremamente irregular ou fragmentada e que têm essencialmente a mesma estrutura em todas as escalas. A origem do termo fractal, introduzido pelo francês Benoît Mandelbrot. Mandelbrot estudou uma gama de formas da natureza e concluiu que todas elas tinham algumas características comuns. Percebeu então que era necessário um novo tipo de matemática para descrevê-las e analisá-las, então introduziu o termo *fractal* proveniente do verbo latino fragere, que quer dizer quebrar, produzir pedaços irregulares; vem da mesma raiz fragmentar em português. Publicou seus resultados num livro que se tornou famoso e influenciou uma nova geração de matemáticos interessados em estudos dos sistemas complexos e caóticos - *The Fractal Geometry of Nature.*

Vamos pensar um pouco sobre as formas da natureza na perspectiva de Mandelbrot: estamos acostumados a analisar formas da natureza na perspectiva euclidiana que nos permite de fato, fazer aproximações como por exemplo, o tronco de uma árvore que tem mais ou menos a forma de um cilindro; o sol no horizonte assemelha-se mais ou menos a um disco circular; os planetas que giram ao redor do Sol representados por esferas de superfície regular e órbitas mais ou menos comparáveis a elipses. Se pensar mos melhor, essas características são exceções, formas geométricas regulares, mesmo que aproximadas, não são regras.

Mas como descrever uma montanha? Uma nuvem? Uma folha de samambaia? Um floco de neve? Uma nuvem é uma esfera? A folha de samambaia é um cone? Um trapézio? Como descrever geometricamente um rio? Talvez trechos de retas paralelas? Um relâmpago seria uma seta? Então, em se tratando de descrever formas da natureza, na perspectiva da Ciência da Complexidade, na busca da descrição e compreensão de sistemas complexos mais próximos do real, a geometria euclidiana parece-nos inadequada e a geometria fractal pode ser um caminho mais viável.

Uma propriedade notável das formas da natureza ou fractais é que apresentam padrões característicos que se repetem em uma escala descendente, de modo que suas partes, em qualquer escala, guardam um formato, semelhantes ao todo. Mandelbrot chamou essa propriedade de “autossimilaridade”.

Ao analisarmos, por exemplo, um pedaço de couve-flor, esse pedaço se parece exatamente com uma pequena couve-flor, guardando semelhança com o todo. Assim, cada pedacinho se parece com uma couve-flor em miniatura. A forma do todo é semelhante a si mesma em todos os níveis de escala.

Se fizermos um exercício de observação, veremos que existem muitos outros exemplos de autossimilaridade na natureza: rochas em montanhas que guardam características similares a pequenas montanhas; ramificações de relâmpagos, ou bordas de nuvens, repetem o mesmo padrão muitas e muitas vezes; bifurcações de grandes rios formando progressivamente rios menores, cada uma delas mostrando arranjos semelhantes. As ramificações de uma árvore ou as ramificações repetidas dos nossos vasos sanguíneos podem exibir padrões de uma semelhança tão incrível que somos incapazes de dizer qual é qual. Segundo Capra, em seu livro *The web of life*, essa semelhança de imagens provenientes de escalas muito diferentes tem sido conhecida desde há longo tempo, mas, antes de Mandelbrot, ninguém dispunha de uma linguagem matemática para descrevê-la.

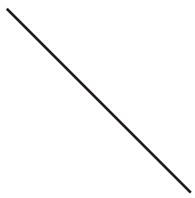
Mas como calcular a dimensão de uma forma fractal?

Não é tão dramático. Peguemos o exemplo da costa brasileira e perguntamos: “Qual é o seu comprimento”?

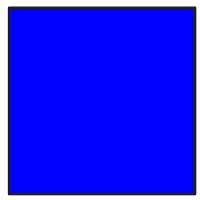
Desde que o comprimento medido possa ser indefinidamente estendido se nos dirigirmos para escalas cada vez menores, não há uma resposta bem definida para essa pergunta. No entanto, é possível definir um número entre l e 2 que caracterize o «denteamento» ou a dimensionalidade do litoral.

Para chegarmos lá, precisamos rever alguns conceitos:

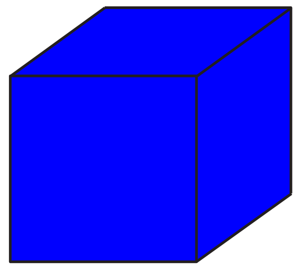
Lembremos que segundo a geometria que conhecemos, um objeto pode apresentar até 3 dimensões:



Objeto unidimensional (1d)



Objeto bidimensional (2d)



Objeto tridimensional (3d)

Podemos calculá-las aplicando o conceito geral de dimensionalidade:

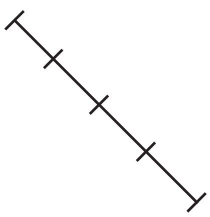
$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\text{Log } N_\varepsilon}{\text{Log }(1/\varepsilon)}$$

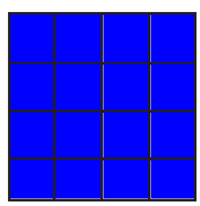
$N_\varepsilon$ = quantidade de segmentos

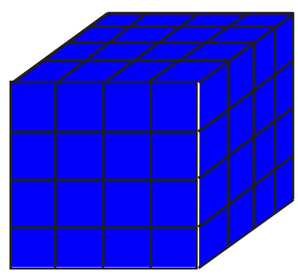
$\varepsilon$ = tamanho relativo de um segmento

O limite indica que a medida será mais precisa, quanto menor for o segmento.

Dividimos os objetos acima em unidades proporcionais:





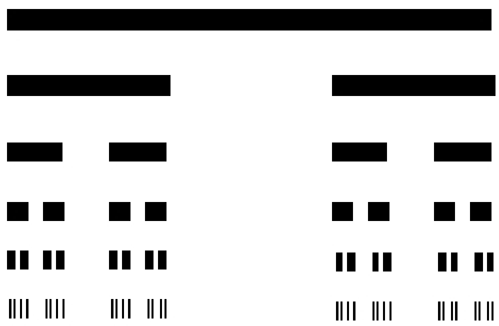


Então, as dimensões dos objetos acima serão d=1, d=2 e d=3, respectivamente.

Vejamos mais exemplos:

O conjunto de Cantor:

Imagine uma tira de papel, divida-a em 3 partes e exclua a parte do meio e repita o processo várias vezes. Como calcular a dimensionalidade desse objeto final que com certeza será menor que 1?



Usando a equação para o cálculo da dimensionalidade temos que:

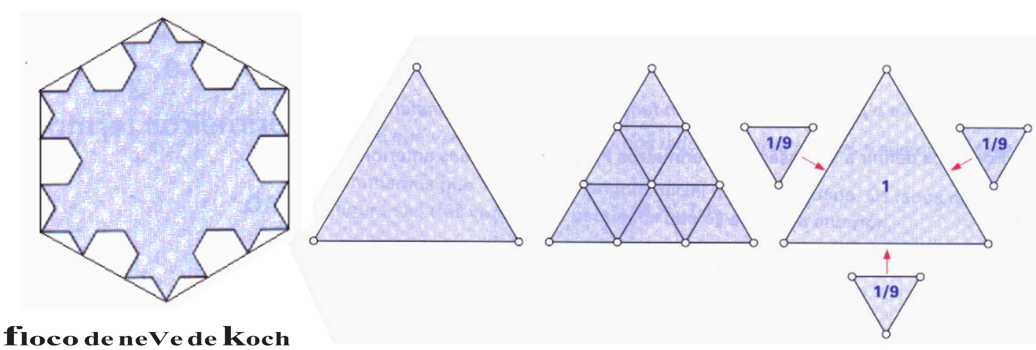
$\varepsilon = 1/3$

$N_\varepsilon = 2$

d= Log 2/Log3

d=0,63

## Floco de neve de Koch

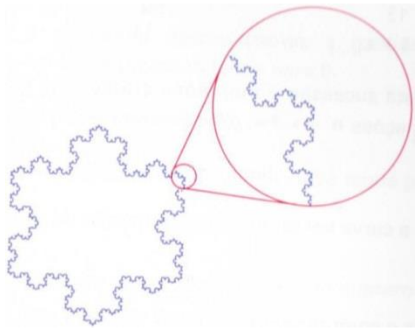



floco de neve de koch

Para o calculo da dimensionalidade do perímetro do floco de neve de Koch, devemos considerar que pela semelhança de figuras planas, sabe-se que, se o lado de um polígono sofre redução de razão de 1/3, como se acrescenta 3 triângulos menores em cada lado de um triângulo maior, cada segmento de seu perímetro tem tamanho 1/3, sendo que se formam 4 segmentos. Assim:

$$\left.\begin{matrix} N = 4 \\ r = 1/3 \end{matrix}\right\} \quad D_F = \frac{\text{Log } 4}{\text{Log } 3} \approx 1{,}26$$

Pode-se observar ainda que o floco de neve de Koch possuiu autossemelhança exata, ou seja cada parte parece refletir o todo.



Ainda não respondemos a pergunta inicial: Qual é o comprimento da costa brasileira?

Talvez a melhor resposta seja:

*Depende.*

*Mas depende de quê?*

*Depende do tamanho do meu barco…*

O comprimento da nossa costa depende de como é medido. Isto acontece porque o litoral, ao contrário do que estamos acostumados a pensar, não é uma linha regular. Assim, dependendo de como é medida, a costa de um país pode ter mil, cinco mil ou dez mil quilômetros!

Vamos pensar na costa de um continente ou de uma ilha como a fronteira que separa a terra do mar. A primeira vista parece claro, num mapa, que essa fronteira é uma linha, ou seja, um objeto unidimensional que tem um comprimento bem definido, mas, ... Afinal, o que mais poderia ser? - Um fractal…

Mandelbrot, definiu um número entre um e dois para dimensionalizar o comprimento da costa britânica, esse número é aproximadamente igual a 1,58; para a costa norueguesa, muito mais acidentada, ele mede aproximadamente 1,70.

Esse número tem certas propriedades de uma dimensão, Mandelbrot o chamou de dimensão fractal. Fritjof Capra nos ajuda a entender explicando que:

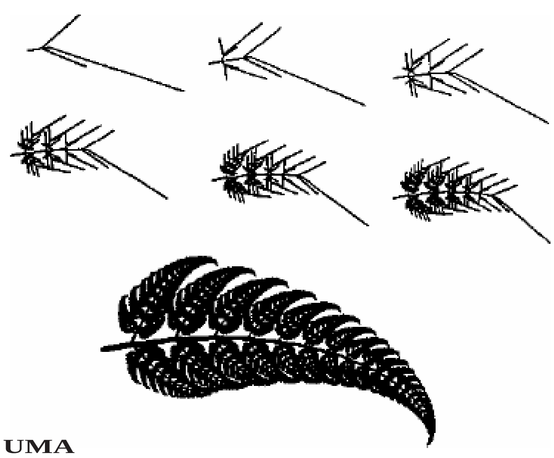
> *... intuitivamente essa ideia compreende que uma linha denteada em um plano preenche mais espaço do que uma linha reta, que tem dimensão l, porém menos do que o plano, que tem dimensão 2. Quanto mais denteada for a linha, mais perto de 2 estará sua dimensão fractal. De maneira semelhante, um pedaço de papel amarrotado ocupa mais espaço do que um plano, porém menos do que uma esfera. Desse modo, quanto mais amarrotado e apertado estiver o papel, mais perto de 3 estará sua dimensão fractal.*
>
> **WeB of life, 1997**

Esse conceito atualmente, é muito importante e poderoso para analisar a complexidade das formas fractais que regem os sistemas complexos.

A modelagem das formas geométricas fractais que são muito semelhantes as que ocorrem na natureza guardam uma autossimilaridade precisa. A melhor técnica é a interação , ou seja a repetição incessante de certa operação geométrica. O processo da iteração, que nos leva à chamada "iteração do padeiro" ou "transformação do padeiro" característica matemática subjacente aos atratores estranhos.

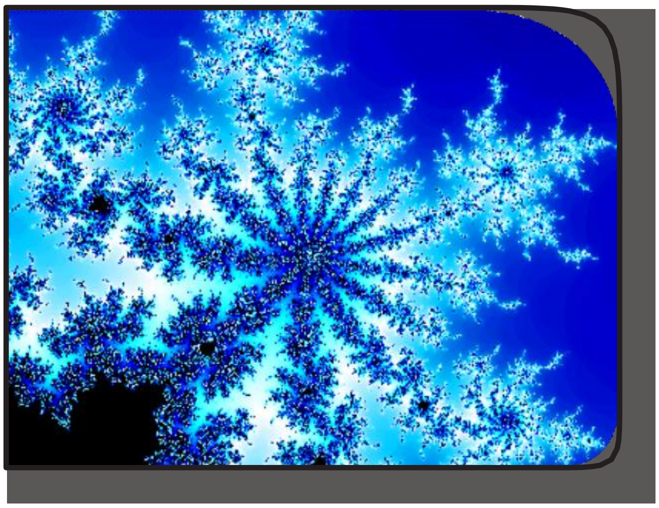
Uma das formas fractais mais simples geradas por iteração é a assim chamada curva de Koch, ou curva de floco de neve que vimos no exemplo anterior para o cálculo da dimensionalidade. A operação geométrica consiste em dividir uma linha em três partes iguais e substituir a seção central por dois lados de um triângulo equilátero, como é mostrado na Figura 10. Repetindo essa operação muitas e muitas vezes, e em escalas cada vez menores, é criada uma curva de floco de neve denteada. De maneira análoga, uma linha litorânea, a curva de Koch torna-se infinitamente longa se a iteração prosseguir ao infinito.

Iterações geométricas computacionais realizadas repetidas vezes e em diferentes escalas produzem os chamados forjamentos (*forgeries*) fractais — modelos de plantas, árvores, montanhas, linhas litorâneas e tudo aquilo que manifeste uma semelhança espantosa com as formas reais encontradas na natureza. A Figura 11 mostra um exemplo de tal forjamento fractal. Iterando o desenho de uma simples vareta em várias escalas, é gerada a bela e complexa figura de uma samambaia.



**MODELAGEM DE UMA LINHA LITORÂNEACOM UMA CURVA DE KOCH. FORGERIE DE UMA SAMAMBAIA.**

**FONTE: GARCIA (1991)**



Com essas novas técnicas matemáticas, os cientistas têm sido capazes de construir modelos precisos de uma ampla variedade de formas naturais irregulares, e, ao fazê-lo, descobriram o aparecimento extensamente difundido das fractais. Dentre todas essas, os padrões fractais das nuvens, que originalmente inspiraram Mandelbrot a procurar por uma nova linguagem matemática, são talvez os mais impressionantes. Sua autossimilaridade estende-se ao longo de sete ordens de grandeza, e isso significa que a borda de uma nuvem ampliada dez milhões de vezes ainda exibe a mesma forma familiar.

Então, as principais propriedades que caracterizam e que permitem definir os conjuntos fractais são a autossimilaridade, que pode ser exata ou estatística, ou seja, o sistema é invariante mantendo a mesma forma e estrutura sob uma transformação de escala (que produz ou amplia o objeto ou parte dele); a extrema irregularidade no sentido de rugosidade ou fragmentação; possuir em geral, uma dimensão fractal não inteira. A dimensão fractal quantifica, de certo modo, o grau de irregularidade ou fragmentação do conjunto considerado. Os fractais são conjuntos definidos por certas propriedades matemáticas e, portanto, têm legitimidade como um conceito matemático coerentemente definido e correlacionado com outros.

Atividades

Leia o artigo (FRACTAIS – A LINGUAGEM DO CAOS), de Alberto Mesquita e Manuel G. Mota, e descreva quais as pricipais caracteristica, e a historia dos fractais.

## OBJETIVO

O objetivo desse trabalho, além de explorar a geometria dos fractais, é mostrar as características e propriedades dos fractais a partir da construção de cartões fractais feitos com dobraduras.

Tendo como objetivo principal da construção dos cartões é mostrar, as propriedades principais dos fractais que são: autossimilaridade e complexidade infinita.

Autosimilaridade - um fractal costuma apresentar cópias aproximadas de si mesmo em seu interior;

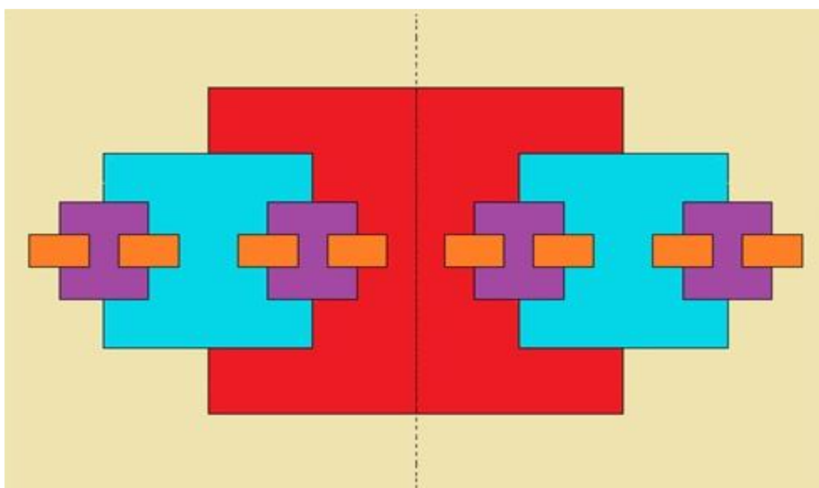
Complexidade infinita - qualquer que seja o número de amplificações de um objeto fractal, nunca obterá a imagem final.

Usadondo a Metodologia da Apredizagem Significa e Significativa Crítica, ultilizando o conhecimento prévio dos alunos.

## CONSTRUINDO CARTÕES FRACTAIS PASSO A PASSO

A construção de cartões fractais, por meio de dobraduras, é uma forma diferente e prazerosa de apresentar a geometria dos fractais para os estudantes de Ensino Médio.

Por ser um trabalho diferente, uma "quebra" da rotina das aulas de matemática, motiva e envolve os alunos.

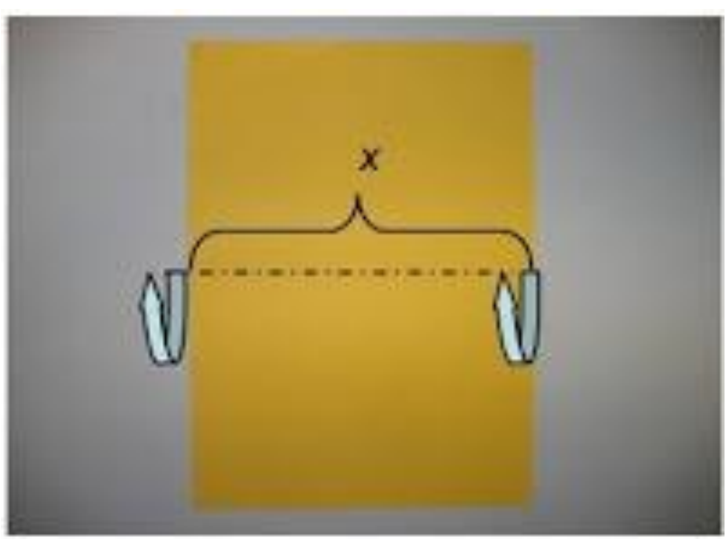


Cartão Fractal
Fonte: MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (2011)

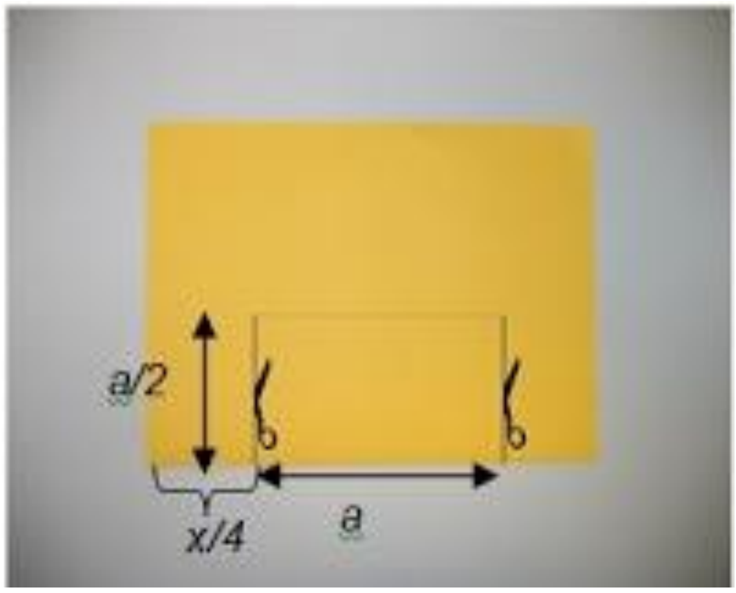
Algumas Etapas para confecção de um Catão Fractal com dobraduras

**1º Etapa** - Pegue uma folha de tamanho A4;

**2º Etapa** - Dobre a folha ao meio, ao longo de sua altura;

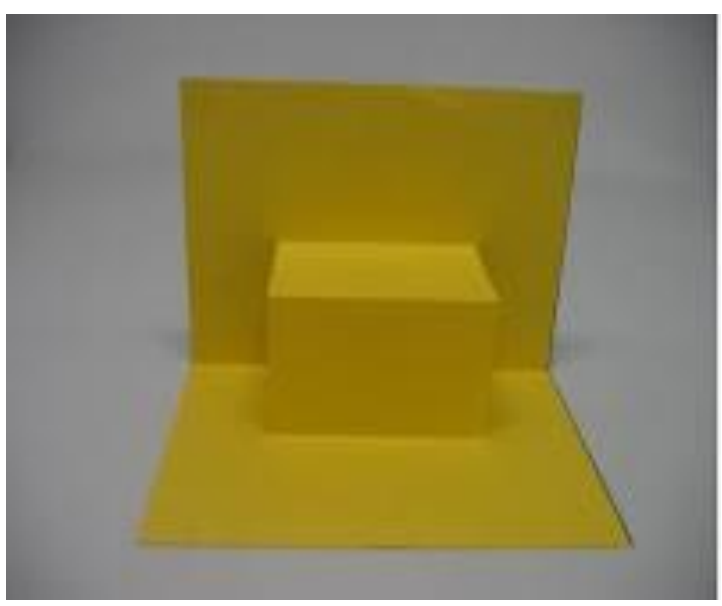



**3º Etapa** - Com a folha dobrada ao meio, faça dois cortes verticais simétricos com a distancia $\frac{x}{4}$ das extremidades da folha, de altura $\frac{a}{2}$. Note que a=2X $\frac{x}{4}$ $X$ $\frac{x}{2}$.

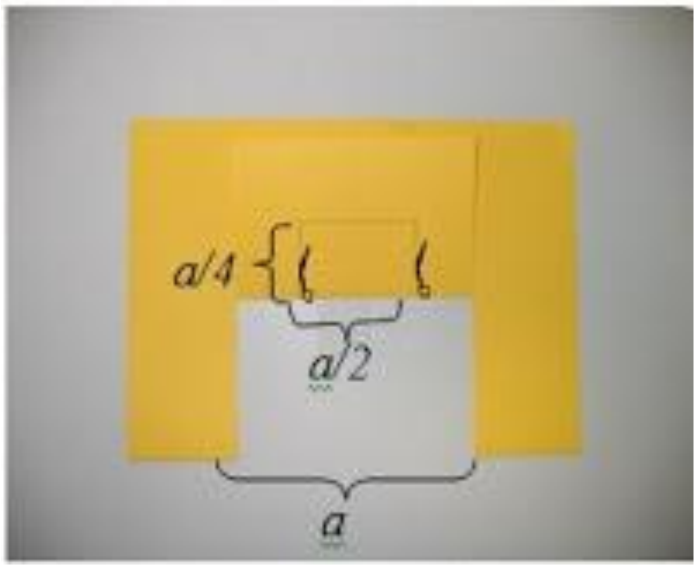



**4º Etapa -** Dobre o retângulo formado para cima, fazendo um vinco na obra;

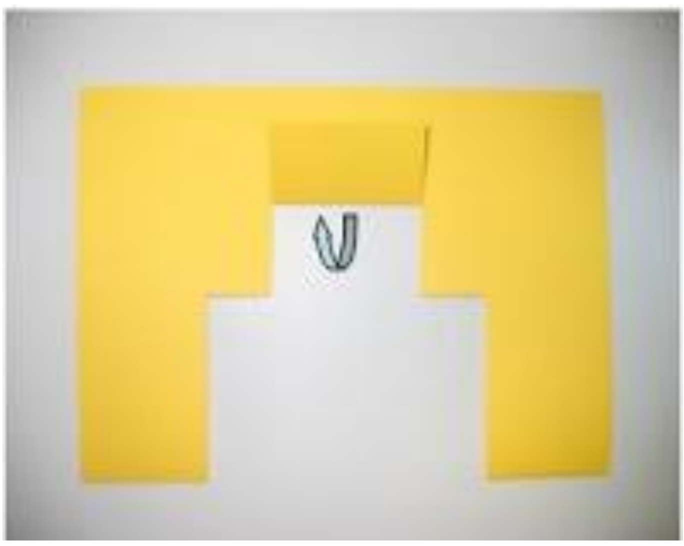
**5º Etapa -** Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe o centro da figura em relevo;



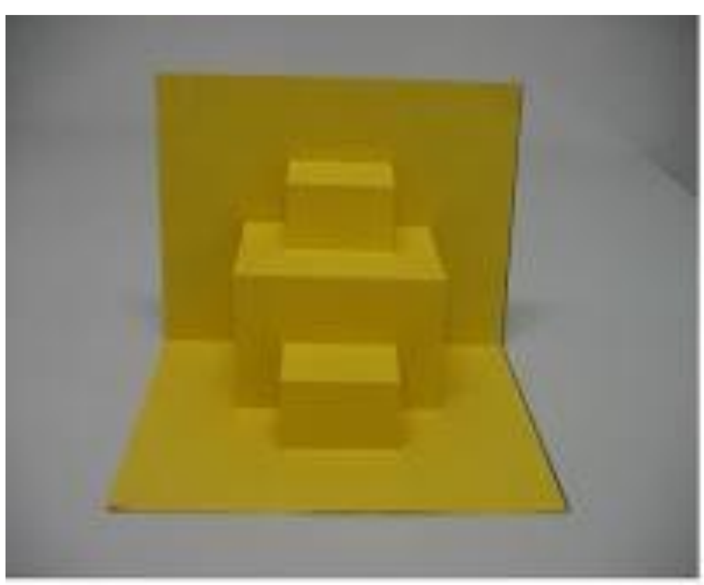
**6º Eatapa -** Para obter as próximas iterações, devemos proceder da mesma forma, porém em uma escala menor, apenas na região dobrada.



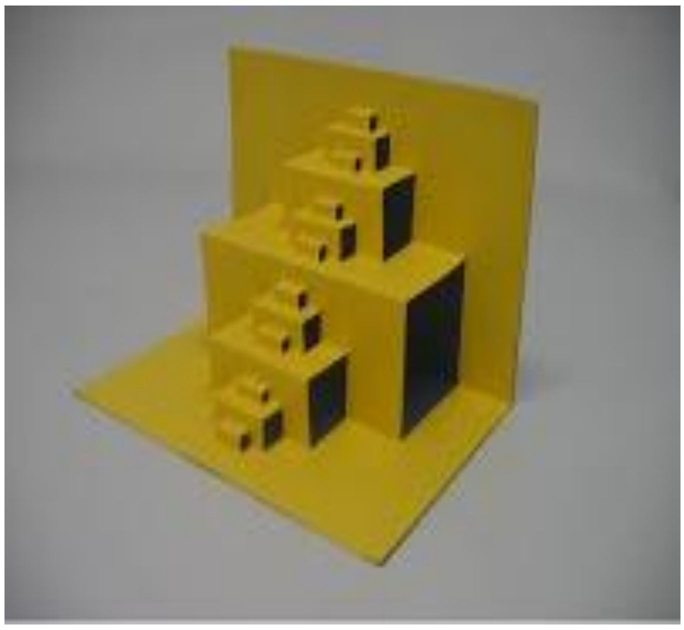

**7º Etapa -** Dobre o retângulo para cima fazendo um vinco na dobra;



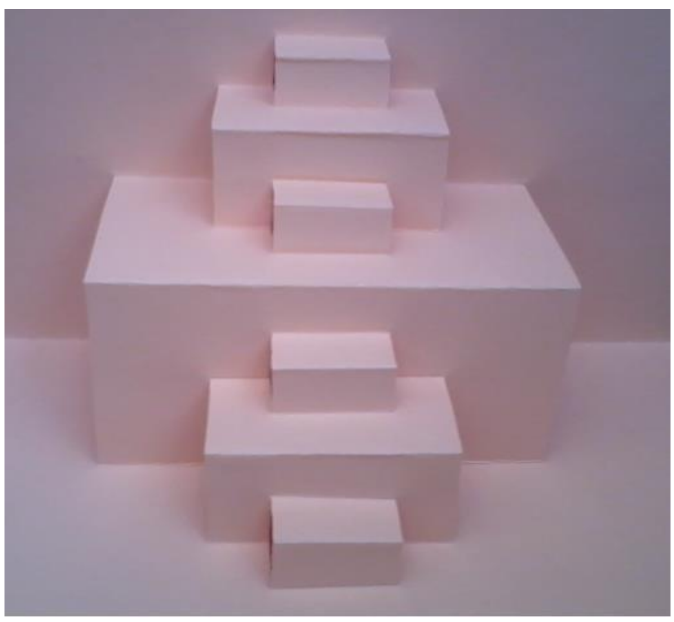
**8º Etapa -** Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe a figura em relevo.



**9º Etapa -** Para obter mais gerações, é necessário repetir esse processo.



Após essas etapas ela fica mais ou menos assim:



Percebemos durante a construção que, a cada novo corte e ddobradura, obtmos novos degraus. Chama-se de interçaõ zero, a primeira geração do cartão, quntos degraus novos surgem a cada interação?

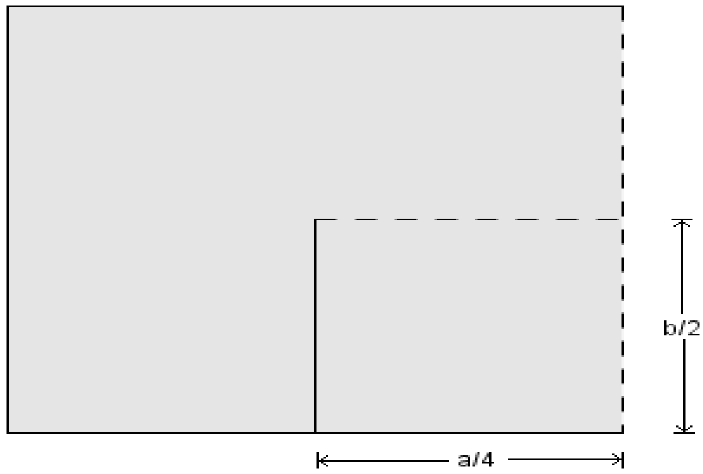
Podemos explorar a construção do cartão construindo tabelas.

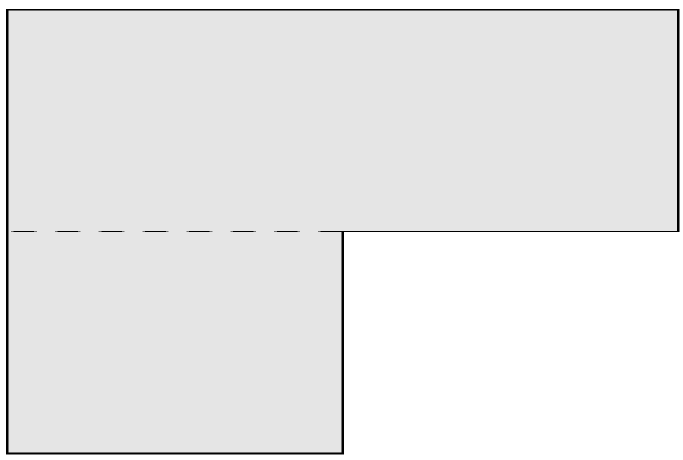
| Interação | Numeros de degraus novos |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| 4 | 16 |
| N | $2^n$ |

A cada interção, o numero de nos degraus dobra, porem em escala menor. Com isso, podemos concluir que o processo de construção dos degraus em cada interção e descrito pela lei de potencia $2^{n,}$ onde n= 0,1,2, 3…E o números das interações. Identificamos que a cada nova interação temos um degrau cercado por 2 novos degraus. Este valor será denominado multiplicador.

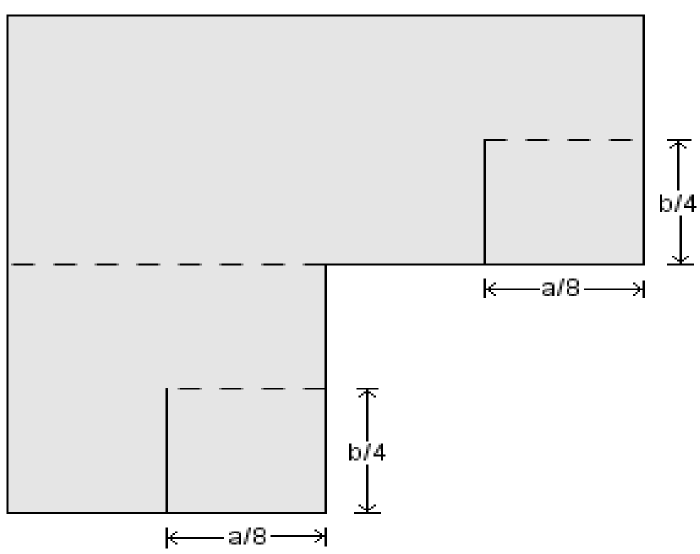
**Cartão Fractal Fractal (Triangulo de Sierpinski).**

**1º Passo -** Encontre a metade, tanto da parte horizontal como da vertical, da folha. Então recote na horizontal até o ponto de encontro das duas retas e dobre para a esquerda.

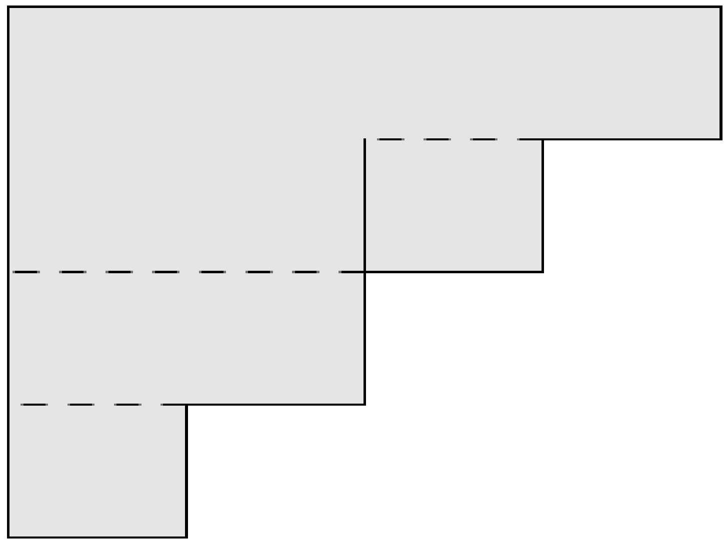


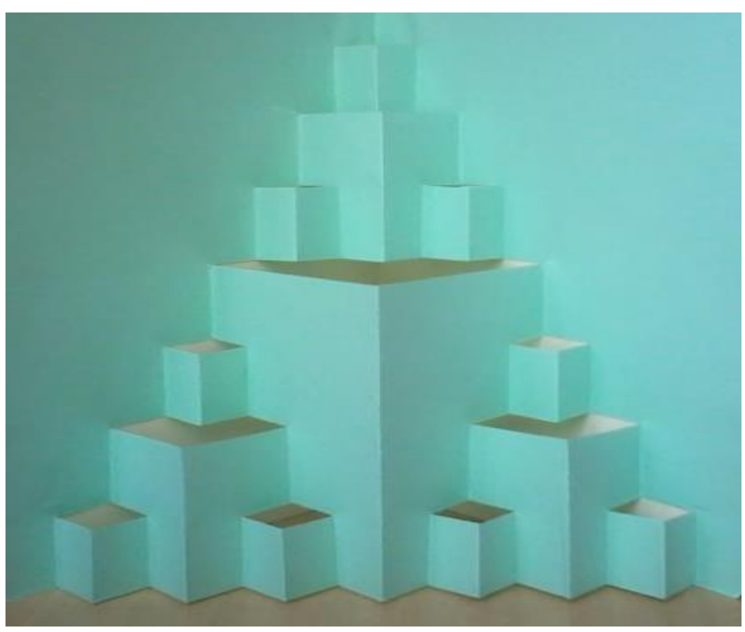



**2º Passo -** Repita o mesmo processo com a parte de cima e de baixo do hexágono obtido.



Após a terrceira interação, vamos ter algo assim:





Apartir do exemplo acima citado construa o cartão fractal, ultilizando os metodos ensinados.

## APLICAÇÃO DE ALGUNS FRACTAIS EM SALA DE AULA ENCONTRADO NA NATUREZA

A maior parte da natureza é muito, muito complicada. Como se poderia descrever uma nuvem? Uma nuvem não é uma esfera.... É como uma bola, porém muito irregular. Uma montanha? Uma montanha não é um cone.... Se você quer falar de nuvens, de montanhas, de rios, de relâmpagos, a linguagem geométrica aprendida na escola é inadequada. (Capra, 1997).

Fazer uma aula de umídia falando sobre a Teoria da Complexida, e também sobre a Geometria Fractal, explorando seus subsunçores.

Depois da apresentação sobre fractais na naturezae em nosso cotidiano, apresenta os seguintes fractais:

1° Passo- Coloca um Brocolis ou uma cove-flor, para que eles possam observar.

***Brócolis***

2° Passo – Divida esse Brocolis em vários pedaços, verificando se eles conseguem observa a autosimilaridade do legume.

***Brócolis Fragmentado***

3° Passo- Verifique os conteúdos abordados: Os alunos deverão fazer a comparação entre as geometrias euclidianas, aspectos e diferenciação das não – euclidianas, neste caso, os fractais.

4° Passo – Mostrar mais alguns fractais encontrados na natureza em mídia:

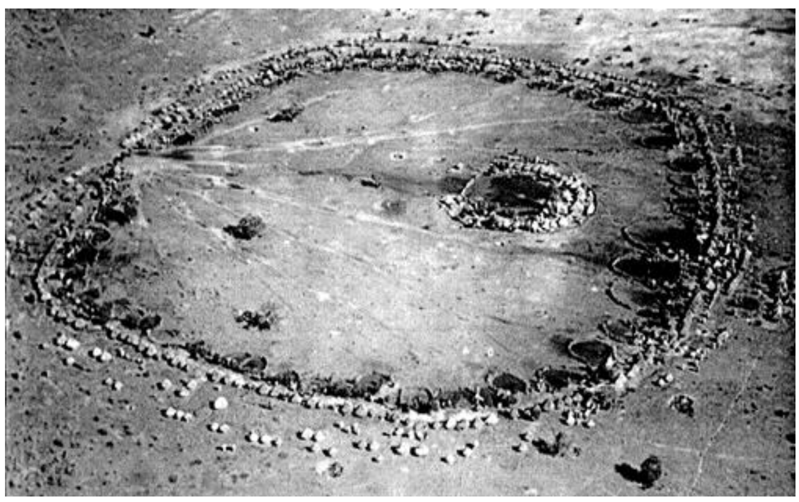
***Brocolís***

***Babosa***

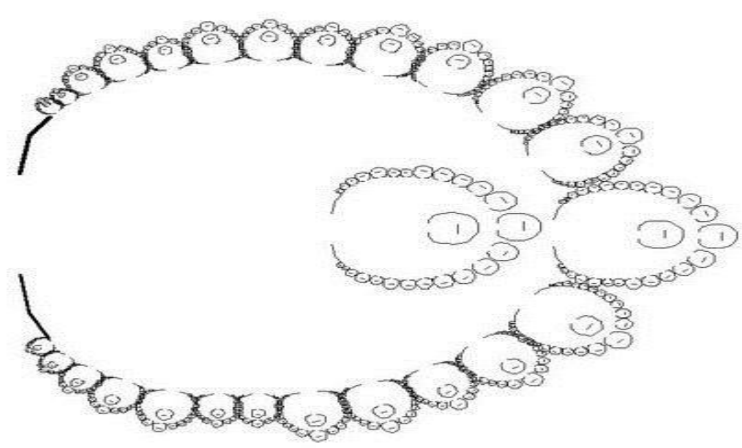
***Galho de Samambai***

***Relampagos***

***Arvoré Sangue de Dragão***



***Vista aérea da Vila Bai-La no sul de Zambia mostra padrão fractal***



***Arquitetura - O padrão fractal da Vila Bai-La***

## Referencial Bibliográfico


CAPRA, F. – **A teia da vida** – uma nova compreensão científica dos sistemas vivos. São Paulo. Ed. Cultrix. 1996. 258f.

Iramaia Jorge Cabral de Paulo;Miguel Jorge Neto;Sérgio Roberto de Paulo: **Introdução a Teoria da Complexidade.Cuiabá;**EdUFMT,2012.

JORGE NETO, M. **Física ambiental e teoria da complexidade: possibilidades de ensino na educação básica.** Cuiabá-MT, 2009. Dissertação (Mestrado em Física Ambiental), Instituto de Física, Universidade Federal de Mato Grosso.

L., Luísa. Fractais. **Arte e Manhas: Olhar o Mundo numa Obra de Arte**... fev. 2009.

MANDELBROT, B. **How long is the coast of britain statistical self-similarity and fractional dimension.** ***Science***, Washington, v. 156, n. 3775, p. 636–638, 1967.

MANDELBROT, Benoit. **Comment j'ai découvert les fractales. La Recherche**, França, n. 175, p. 420 - 424, mar. 1986.

FALCONER, K. **Fractal geometry: Mathematical foundations and applications**. Wiley, 2004.