UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS

FRACTAL – A GEOMETRIA DA NATUREZA APLICADA NO ENSINO MÉDIO NO ENSINO DE FÍSICA

JOSEMY BRITO DA SILVA

PROF. DR. SERGIO ROBERTO DE PAULO

Cuiabá, MT, agosto 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS

FRACTAL – A GEOMETRIA DA NATUREZA APLICADA NO ENSINO MÉDIO NO ENSINO DE FÍSICA

JOSEMY BRITO DA SILVA

***Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais da Universidade Federal de Mato Grosso, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre*.**

PROF. DR. SERGIO ROBERTO DE PAULO

Cuiabá, MT, agosto 2016

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

B862f Brito da Silva, Josemy.
Fractal - A Geometria da Natureza Aplicada no Ensino Médio no Ensino de Física / Josemy Brito da Silva. -- 2016
63 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Sergio Roberto de Paulo.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais, Cuiabá, 2016.
Inclui bibliografia.

1. Fractal. 2. Teoria da Complexidade. 3. Teoria de Aprendizagem Significativa. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS
Avenida Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança - CEP: 78060900 - Cuiabá/MT
Tel : (65) 3615-8737 - Email : ppecn@fisica.ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO : "Fractal - A Geometria da Natureza Aplicada no Ensino Médio no Ensino de Física"

AUTOR : Mestrando Josemy Brito da Silva

Dissertação defendida e aprovada em 19 de Agosto de 2016.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca / Orientador Doutor Sérgio Roberto de Paulo
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinadora Interna Doutora Iramaia Jorge Cabral de Paulo
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Jonathan Willian Zangeski Novais
Instituição : Universidade de Cuiabá

Cuiabá, 19 de Agosto de 2016.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao Pai Criador, pelas possibilidades que me apresentou; a minha esposa Irineia, pelo seu amor, companheirismo e apoio incondicional. Aos meus amados filhos Ryan e Raynner pela paciência e amor.

AGRADECIMENTOS

A Deus em primeiro lugar por sua infinita bondade e por me dar sabedoria.

Ao meu orientador Prof. Dr. Sérgio Roberto de Paulo, pelo apoio e suas orientações.

A minha querida esposa e amiga Irineia pelo amor incondicional, pela paciência por estar distante em momentos importantes e pelo apoio dado para poder continuar esse trabalho.

Aos meus filhos Ryan e Raynner pelo amor dado e paciência e ainda por me dar força para poder prosseguir.

Aos meus Pais João e Marluce por ter me dado educação e caráter para ser sempre um grande homem.

Aos meus irmãos Josimar, João, Jocilene e Janeluce por estarem sempre torcendo e apoiando.

A minha querida sogra e amiga, Ivone que em momentos difíceis tem dado apoio e carinho.

Aos queridos amigos e companheiros do mestrado, que dividiram seus conhecimentos para poder concluir este trabalho.

Ao meu amigo José Carlos, amigo de turma e companheiro de estudo e incentivo.

A toda equipe do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Naturais, em especial a Neusa nossa brilhante secretária.

Ao Prof. Dr. Marcelo Paes de Barros, Coordenador do Programa.

Aos professores do Programa que nos passaram conhecimento, em especial a Profª Drª Iramaia Jorge Cabral e Prof. Ms. Edward Bertholine (Vavá).

A gloriosa Polícia Militar e amigos.

Aos meus coordenadores, Tenente Coronel da Polícia Militar e Prof. Dr. Edson Benedito Rondon e Tenente Coronel Sebastião Carlos por terem conseguido me dar condições em meu trabalho para conclusão de minha Pós Graduação.

Aos amigos Enzi Cerqueira de Almeida Junior, Laudicério Aguiar Machado e Anderson P. Silva pelo apoio, pela amizade e conhecimento.

A Escola Estadual Maria da Cunha Bruno e seus professores, por me proporcionar a realização da aplicação do meu trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

SILVA, J. B. **Fractal – A geometria da natureza aplicada no ensino médio no ensino da física**. Cuiabá, 2016. 62 p. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Física, Universidade Federal de Mato Grosso.

A presente dissertação visa abordar o estudo da Geometria Fractal no Ensino Médio como forma de auxílio nas aulas de física. Tem o objetivo de explorar possibilidades para que a Geometria Fractal possa ser ensinada no ensino médio. A Geometria Fractal apresentada por meio de aulas audiovisual, figuras, construções de cartões e aplicações no dia a dia, torna-se um exemplo de matemática aplicada que pode ser utilizada durante as aulas e propiciar inúmeros benefícios aos alunos do Ensino Médio na aprendizagem da física. Este trabalho traz uma breve apresentação desta Geometria, tratando da história de sua descoberta, suas características, definição, aplicações e seguida pela Teoria da Complexidade e da Teoria de Aprendizagem Significativa. Além disso, mostra a importância de abordagens diferenciadas no ensino da física por meio da inclusão de conteúdos como a de Geometria Fractal para estimular os alunos a perceber as aplicações desta ciência no cotidiano. A pesquisa foi realizada com alunos do Ensino Médio de uma escola pública no município de Várzea Grande-MT. Foram utilizados como procedimento metodológico de coleta de dados, questionários e aulas audiovisual. No início da pesquisa, a maioria dos alunos disse que nunca tinham ouvido falar de Geometria Fractal. No entanto, após a aula sobre essa Geometria, os alunos perceberam que ela tem muitas aplicações e que está presente no nosso cotidiano, mostrando-se motivados e afirmando estarem interessados em aprender não apenas a Geometria como também diversos conteúdo da física.

Palavras-chave: Geometria fractal, teoria da complexidade, aprendizagem significativa

ABSTRACT

SILVA, J. B. **Fractal - The geometry of nature applied in high school in physics education**. Cuiabá, 2016. 62 p. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Física, Universidade Federal de Mato Grosso.

This dissertation aims to approach the study of fractal geometry in high school as a way to aid in physics classes. It objective to explore possibilities for the Fractal Geometry for it to be taught in high school. The Fractal Geometry to introduce by means of audiovisual lessons, figures, buildings cards and applications in everyday life, it becomes a math example applied that can be used during the lessons and provide numerous benefits to high school students in physical learning. This dissertation brings a brief presentation of this geometry, dealing with the history of its discovery, yours characteristics, definition, application and followed by Complexity Theory and the Theory of Meaningful Learning. It shows the importance of different approaches in physics education through the inclusion of content as the Fractal Geometry to encourage students to understand the applications of this science in everyday life. The search was conducted with high school students in a public school in the city of Várzea Grande- MT. They used as methodological procedure of data collection, questionnaires and visual classes. At first the search, most students said they had never heard of Fractal Geometry. However, after the class on this geometry, the students realized that it has many applications and is present in our daily lives, being motivated and claiming to be interested in learning not only the geometry as well as various physical content.

Keywords: Fractal geometry, complexity theory, significant learning

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos todas as áreas do conhecimento vêm passando por transformações, inclusive a Física.

Com isso, é importante que futuros professores de Física, pesquisem a diversidade e os avanços que esta área apresenta, para que o aluno tenha acesso a essa forma de conhecimento em sala de aula, de modo que a disciplina de Física possa lhe trazer maior prazer, motivação e interesse.

Esta pesquisa tem o objetivo de explorar possibilidades para que a Geometria Fractal possa ser ensinada no ensino médio. Tem ainda, como diretriz, fazer um questionário, bem como aplicar aulas de introdução a geometria fractal e experiências com objetos da natureza e do seu dia a dia.

O tema Fractal é novo, e existem poucos trabalhos de inserção no ensino médio, tais como, Fractais-Alves, 2007, Algoritmos e Fractais com programa GD-Brandão, 2005, Geometria Fractal-Bonssoi, 2005.

A Revista Brasileira da Academia de Letras em sua edição de número 82, no ano de 2015, fez todos os seus capítulos sobre os fractais. Esse número é enriquecido com a obra do Grupo Fractarte, que foi formado no ano de 1992, tendo como seus principais membros Alexander Dupont, Humberto Rossetti Baptista e Rodrigo de Almeida Siqueira.

Os fractais podem ser considerados como estruturas geométricas constituídas com pequena infinidade de réplicas. Suas principais características são: complexidade infinita, a auto similaridade e a dimensão fractal em qualquer escala.

Na década de 30, o trabalho de Kurt Goedel demonstrou que a matemática, tida como a mais exata das ciências, não pode ser considerada como absolutamente coerente e os conjuntos de teoremas até então desenvolvidos não estavam livres de falhas lógicas. Diz ainda, que tal descoberta minimizou a perspectiva de que a matemática poderia oferecer um sistema exato e determinista para a ciência. A partir de então, esta área do conhecimento evolui incorporando novas linhas de investigação com uma visão mais probabilística do que exata, tais como, a geometria fractal, o estudo das equações diferenciais não lineares e lógica fuzzy (JORGE, 2009).

A geometria fractal trata dos conjuntos ou estruturas fractais. Os fractais são conjuntos cuja forma é extremamente irregular ou fragmentada e que têm essencialmente a mesma estrutura em todas as escalas. A origem do termo fractal, introduzido por Mandelbrot, está no radical ***fractus***, proveniente do verbo latino ***fragere***, que quer dizer quebrar, produzir pedaços irregulares; vem da mesma raiz fragmentar em português (MOREIRA, 2003).

Alguns conceitos matemáticos abstraídos dos fractais e os recursos tecnológicos que podem ser explorados no ensino básico, tornam-se evidentes no trabalho realizado por BARBOSA (2005), que traz uma introdução de como os professores podem inserir os fractais no ambiente educacional. Há também outras pesquisas referentes à abordagem de fractais no ensino básico tais como de BALDOVINOTTI (2008).

Notam-se muitas estruturas ou processos naturais com propriedades similares às dos fractais, em particular a simetria de escala, e que podem, no entanto, ser descritos por eles, pelo menos em determinado domínios (MOREIRA, 2003).

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. TEORIA DA COMPLEXIDADE

A geometria fractal faz parte de um desdobramento recente na ciência, que é a Teoria da Complexidade, que traz uma nova perspectiva de visão de mundo e de ciência, que vai além dos limites estabelecidos pela ciência cartesiana.

A física clássica de Isaac Newton até o século XIX, estabelecia uma exata correspondência entre causa e efeito. Os cientistas tinham certeza de ser capazes de reduzir até as mais complicadas situações, as interações de umas poucas leis simples e de, assim prever o comportamento dos mais complexos sistemas ao longo do tempo.

O modelo de emissão de radiação postulado por Max Planck, em seu revolucionário trabalho sobre a teoria quântica, publicado em 1900, e o do universo proposto pouco depois em 1905, por Albert Einstein, na famosa Teoria da Relatividade, mostraram que, nos extremos do muito grande e do muito pequeno, as leis de Newton, um dos pilares da Física Clássica, não funcionavam.

Longe de ser previsível como um mecanismo de relojoaria, a natureza nos aparecia agora aleatória como um lance de dados.

Mais recentemente, a ciência entendeu essa mensagem de incerteza e imprevisibilidade ao mundo do dia-a-dia. A teoria do Caos e, mais recentemente, a Teoria da Complexidade são termos genéricos pelos quais ficou conhecido o novo modelo de funcionamento das coisas.

O principal catalizador da Teoria do Caos foi o trabalho do meteorologista Edward Lorenz, do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT). No início da década de 60, Lorenz desenvolveu um modelo que simulava no computador a evolução das condições climáticas. Dados os valores iniciais de ventos e temperaturas, o computador fazia uma simulação da previsão do tempo (CAPRA, 1996).

Lorenz imaginava que pequenas modificações nas condições iniciais acarretariam alterações na evolução do quadro como um todo, quando, por outro lado, teve sua surpresa ao descobrir que mudanças infinitesimais nas entradas poderiam ocasionar alterações drásticas nas condições futuras do tempo.

Nessa perspectiva foi possível inferir que uma leve brisa em Nevada, a queda de 1 grau na temperatura em Massachusetts, o bater de asas de uma borboleta na Califórnia podiam causar um furacão na Florida um mês depois.

Da previsão do tempo, das colônias de cupins à Internet, a constatação de que mudanças diminutas podem acarretar desvios radicais no comportamento de um sistema veio reforçar a nova probabilidade da Física.

O comportamento dos sistemas físicos, mesmos os relativamente simples, tem uma componente de imprevisibilidade.

A ideia de que a natureza seja fundamentalmente aleatória vai contra nossa intuição.

Mas, a segunda constatação é ainda estranha: há padrões, regularidades por trás dos comportamentos aleatórios dos sistemas físicos mais complexos, como a atmosfera ou mar.

Na verdade, o estado final de um sistema não é um ponto qualquer; certos percursos parecem ter mais sentido que outros, ou, pelo menos, ocorrem com muito maior frequência.

Os estudiosos os chamam de atratores estranhos (*strange attractors*). “Eles permitem que os cientistas prevejam o estado mais provável de um sistema, embora não quando precisamente ele vá ocorrer” (CAPRA, 1996).

> É o que acontece com a previsão do tempo ou um maremoto, por exemplo. De acordo com a dimensionalidade de um atrator de uma variável, podemos classifica-la em periódica, semi-periodica e caótica se seus atratores tiverem dimensões inferior a dois, dois e acima de dois respectivamente (PRIGOGINE; NICOLIS, 1998).

Uma vez que a teoria da Complexidade ainda é uma novidade dentro da academia, pesquisas a respeito de como ensiná-la e divulgá-la são importantes na área de Ensino.

A Teoria da Complexidade tem seu marco inicial no final do século passado, com Ilya Prigogine, prêmio Nobel de Química de 1977, que emprega o termo “Complexidade”, como científico. Prigogine estabeleceu os princípios gerais dos sistemas fora do equilíbrio (WALDROP, 1992).

Para ILYA PRIGOGINE; GRÉGOIRE NICOLIS (1998), a complexidade é encontrada em diversos contextos e tem a ver com a própria manifestação da vida.

Logo, a busca de soluções para desafios que ora se apresentam requer uma abordagem que necessariamente passa pelas intrincadas relações pertinentes a vida.

Conceitos como energia (bem como seus processos de conservação e transformação), entropia, calor temperatura, transição de fase e momento são indispensáveis para a compreensão para a Teoria da Complexidade (JORGE, 2009).

Prigogine argumenta que há fenômenos à nossa volta, no mundo macroscópico, que possuem características quânticas, apresentando-se somente sob certas circunstâncias, e que a incerteza e o não-determinismo são componentes fundamentais da natureza (JORGE, 2009).

Os resultados obtidos com a Teoria da Complexidade são atualmente utilizados em diversas áreas, como na meteorologia, dinâmica de populações e ecossistemas e particularmente na economia, área em que trabalham um grande número de cientistas “complexos” no mundo.

Assim sendo, esse novo ramo do conhecimento humano é de fundamental importância às ciências ambientais, uma vez que essas se propõem a estudar justamente sistemas abertos fora do equilíbrio: os ecossistemas e a sua interação com o entorno.

Uma vez que a Teoria da Complexidade ainda é uma novidade dentro da academia, pesquisas a respeito de como ensiná-la e divulgá-la são importantes para a área de ensino.

Nesse contexto, os conceitos-chave das ciências básicas também são fundamentais, e em particular os da Física.

Conceitos como energia, bem como seus processos de conservação e transformação, entropia, calor, temperatura, transição de fase e momento são indispensáveis para a compreensão para a Teoria da Complexidade e sua aplicação em Física.

2.2. APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Aprendizagem significativa é o nome que David Ausubel utiliza em sua teoria cognitiva que traduz a concepção de um processo pelo qual uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante da estrutura do conhecimento do indivíduo. A nova informação interage com uma estrutura de conhecimento específico existente na estrutura cognitiva do indivíduo. A aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos relevantes preexistentes na estrutura cognitiva de quem aprende — os "subsunçores" (MOREIRA; MASINI, 1982).

Ausubel defende que é possível desenvolver uma teoria de aprendizagem significativa alicerçada em princípios. Um desses princípios, que ainda hoje continua a ser o farol que ilumina a teoria é o seguinte: “Se tivesse que reduzir toda psicologia educacional a um único princípio, diria: o fator singular mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra isso e ensine de acordo.” (AUSUBEL et al., 1980, p. 137).

Segundo GONZALEZ; NOVAK (1996, p. 39), a aprendizagem significativa “ocorre quando o resultado da interação entre o conceito inclusor e a nova informação conduz a alguma modificação nos dois, o conceito inicial na estrutura cognitiva e a informação recém-aprendida. ”

AUSUBEL, diz que é possível que a aprendizagem se dê de maneira tal que novas informações sejam adquiridas por um aluno sem que nenhuma ou poucas associações sejam feitas com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva do aluno, em um processo denominado de aprendizagem mecânica.

A aprendizagem mecânica acima apresentada ocorre se a tarefa consistir de associações puramente arbitrárias, como na associação de pares, quebra-cabeça, labirinto, ou aprendizagem de séries e quando falta ao aluno o conhecimento prévio relevante, necessário para tornar a tarefa potencialmente significativa e também, independentemente do potencial significativo contido na tarefa, se o aluno adota uma estratégia apenas para internalizá-la de uma forma arbitrária, literal, por exemplo, como uma série arbitrária de palavras (AUSUBEL et al.,1980, p. 23).

Portanto, não se trata de rejeitar a aprendizagem mecânica e sim de considerá-la possível e necessária até que o indivíduo tenha condições de aprender significativamente, passando a reelaborar conceitos mais complexos a partir de subsunçores previamente elaborados. Por outro lado, AUSUBEL considera a aprendizagem representacional como significativa. Nesse caso, não haveria porque começar com aprendizagem mecânica.

A aprendizagem significativa, ao ser externalizada, vem impregnada da leitura de mundo do aluno. Tem que ter uma negociação entre professor e aluno para que se tenha pontos básicos conceituais compartilhados que evidenciem a aprendizagem. Portanto, há que se repensar o processo de avaliação como uma inferência se os alunos assimilaram conceitos, recolhendo informações das mais diversas formas para buscar evidências que possam indicar que houve aprendizagem significativa por parte do aluno.

Portanto, é necessário que se efetive condições para que ocorra a aprendizagem significativa. Segundo AUSUBEL apud MOREIRA (1982), há duas condições para a ocorrência da aprendizagem significativa (PAULO, 2006):

> ***a)*** *Que o material a ser aprendido seja relacionável à estrutura cognitiva do aprendiz, de maneira não-arbitrária e não-literal. Um material com essa característica é dito potencialmente significativo. Essa condição implica não só que o material seja suficientemente não-arbitrário, em si, de modo que possa ser aprendido, mas também que o aprendiz tenha disponível em sua estrutura cognitiva os subsunçores adequados.*
>
> ***b)*** *Que o aprendiz manifeste uma disposição para relacionar, de uma maneira substantiva e não-arbitrária, o novo material potencialmente significativo, à sua estrutura cognitiva.*

Existem princípios programáticos que visam facilitar a aprendizagem significativa (MOREIRA, 2005). Apresentar os conceitos mais gerais de um determinado conteúdo no início da instrução e, progressivamente, diferenciá-los em suas especificidades (*diferenciação progressiva*); explorar de modo explícito as relações entre conceitos e proposições (*reconciliação integradora*); estabelecer, sempre que possível, uma sequência coerente (*organização seqüencial*) entre os tópicos, ou unidades de estudo, que serão explorados e, por último, a revisão para consolidar a estabilidade dos novos significados.

> Diferenciação progressiva é o princípio programático segundo o qual as ideias mais gerais e inclusivas da matéria de ensino devem ser apresentadas desde o início da instrução e, progressivamente, diferenciadas em termos de detalhes e especificidade. Não se trata de um enfoque dedutivo, mas sim de uma abordagem na qual o que é mais relevante deve ser introduzido desde o início e, logo em seguida, trabalhado através de exemplos, situações, exercícios. As ideias gerais e inclusivas devem ser retomadas periodicamente favorecendo assim sua progressiva diferenciação. É um princípio compatível com a progressividade da aprendizagem significativa (TAVARES, 2011).

Por outro lado, a programação da matéria de ensino deve não apenas proporcionar a diferenciação progressiva, mas também explorar, explicitamente, relações entre conceitos e proposições, chamar a atenção para diferenças e semelhanças e reconciliar inconsistências reais e aparentes. É nisso que consiste a reconciliação integradora, ou integrativa, como princípio programático de um ensino que visa à aprendizagem significativa (TAVARES, 2011).

A organização sequencial, como princípio a ser observado na programação do conteúdo com fins instrucionais, consiste em sequenciar os tópicos, ou unidades de estudo, de maneira tão coerente quando possível (observados os princípios de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa) com as relações de dependência naturalmente existentes entre eles na matéria de ensino (TAVARES, 2011).

A consolidação como quarto princípio programático de um ensino objetivando a aprendizagem significativa leva a insistir no domínio do que está sendo estudado antes de introduzirem-se novos conhecimentos. É uma decorrência natural da premissa de que o conhecimento prévio é a variável que mais influencia a aprendizagem subsequente (TAVARES, 2011).

Organizadores prévios são materiais introdutórios apresentados antes do material de aprendizagem em si mesmo, em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade, para servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que deveria saber para que esse material fosse potencialmente significativo ou, mais importante, para mostrar a relacionabilidade do novo conhecimento com o conhecimento prévio (TAVARES, 2011).

Segundo AUSUBEL, existem diversos processos mediante os quais a aprendizagem significativa ocorre. Tais processos se referem à dinâmica da estrutura cognitiva, ou seja, como a estrutura cognitiva muda com o tempo. Assim, o aprendiz adquire ideias genéricas por meio de experiências, vivências, por descoberta, em um processo chamado *formação de conceitos*, que ocorre mais frequentemente em crianças em idade pré-escolar ou por *assimilação de conceitos*, relacionando novos atributos recebidos a ideias já relevantes estabelecidas na estrutura cognitiva, de modo não-arbitrário e não-literal, o que ocorre mais frequentemente ao longo do processo de escolarização, e progressivamente passa a predominar em indivíduos adolescentes e adultos.

Uma vez que uma nova informação é assimilada, tanto ela quanto o conceito subsunçor a ela relacionado já não são mais os mesmos. Ambos são modificados, ou reformulados, durante o processo de assimilação. Nessa etapa, tanto os conceitos subsunçores (A) e as informações originais (a), quanto os correspondentes reformulados (A´ e a´) coexistem, pode-se dizer que em algumas situações predomina a' e em outras A', dependendo do poder explicativo de cada um frente a necessidade de compreensão e/ou explicação da mesma.

$$\mathbf{A} + \mathbf{a} \rightleftarrows \mathbf{A'}\ \mathbf{a'}$$

Enquanto o subsunçor e a informação relevante originais são dissociáveis, o resultado da assimilação – subsunçor e informação modificados – fazem parte de um todo. Essa etapa é denominada de *fase de retenção*, uma vez que a nova informação pode ser recuperada com características que a identificam e a distinguem da ideia-âncora.

Concomitante à fase de retenção, inicia-se um processo – chamado *obliteração* – em que **a´** acaba perdendo identidade, restando apenas **A´**. Trata-se da *assimilação obliteradora*, em que à nova informação (**a**) resta o papel de modificar, enriquecer, reelaborar, o conceito subsunçor (**A**), não ficando incorporada, com identidade, na estrutura cognitiva. Pode-se dizer, nesse caso, que, apesar de desempenhar um papel importante no processo de assimilação, a informação **a** é "esquecida" (MOREIRA; MASINI, 1982). Contudo, não se trata de esquecimento no sentido usual do termo, pois, de alguma maneira, a nova informação "está dentro do subsunçor".

2.3. FRACTAL

A palavra fractal vem do latim fractus, que quer dizer fragmentado, fracionado. É a ideia de que a parte está no todo e o todo está na parte. Fractais são objetos e estruturas de dimensão espacial fracionária, com a propriedade de auto similaridade.

Uma das características fundamentais dos fractais e a repetição infinitamente do objeto, e, portanto para isso temos que ter o conhecimento de que é infinito. A percepção de infinito está subjacente aos objetos fractais, pois estes são obtidos no limite de um processo de construção que se repete indefinidamente e como tal, temos necessidade de atribuir um limite ao nosso campo de visão.

Segundo GLEICK, (1990), "***Para os olhos da mente, um fractal é uma maneira de entrever o infinito***".

Alguns exemplos muito conhecidos no mundo da geometria são as gravuras de M. C. Escher, em que este preenche o plano com figuras sucessivamente menores. Com essas figuras, Escher tenta alcançar o limite do infinitamente pequeno de modo a simbolizar o infinito. Quem quiser representar um número infinito, tem de reduzir gradualmente o tamanho das figuras até que alcance, pelo menos teoricamente, o limite do formato infinitamente pequeno.

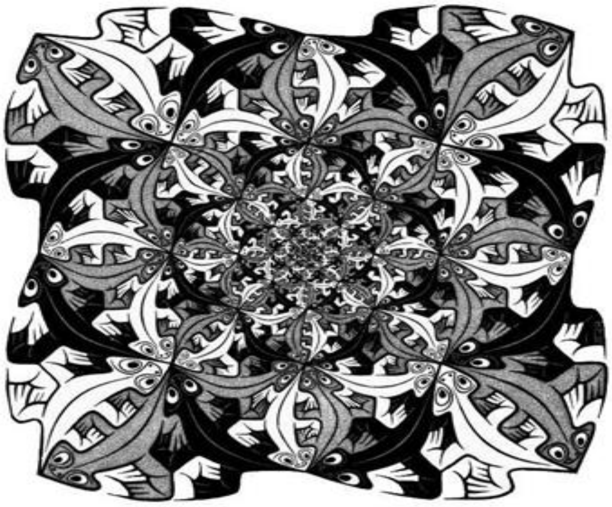

Figura 1 - Smaller and smaller, 1956

Fonte: Internet.

2.3.1. Geometria Fractal

A geometria Euclidiana é a geometria que normalmente aprendemos nas escolas. Seus polígonos e poliedros regulares fazem parte da história da Matemática, pois serviram de base para a compreensão da natureza, através da ciência. As criações humanas servem- se essencialmente das formas geométricas euclidianas para as suas construções, como por exemplo, edifícios, objetos industriais e do cotidiano.

Conta-se por tradição que há mais de dois mil anos, Euclides enquanto caminhava pela praia, notou que a areia, vista como um todo, se assemelhava a uma superfície contínua e uniforme, embora fosse composta por pequenas partes visíveis.

Começou então a tentar provar, matematicamente, que todas as formas da natureza podiam ser reduzidas as formas geométricas simples.

Euclides concentrou-se, sobretudo nas formas, deixando de lado, um elemento importantíssimo neste tipo de análise, a dimensão. Existe uma infinidade de fenômenos na natureza que não podem ser descritos por essa geometria. A maior parte das formas apresentadas pela Natureza, não são regulares e nem suaves, pelo contrário, são extremamente complexas, recortadas e irregulares. E o caso da grande parte das arvores e plantas, das rochas e das nuvens.

Como disse Mandelbrot, 1983, “Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, tronco de árvores não são suaves e nem o relâmpagos viaja em linha reta”.

Na segunda metade do século XIX e na primeira metade do século XX, alguns matemáticos, criaram alguns objetos que ficaram conhecidos como monstros matemáticos, como por exemplo: a curva de Peano, o triângulo de Sierpinski, a curva de Von Koch, o conjunto de Julia, o conjunto de Cantor, entre outros.

O matemático Benoit Mandelbrot, que possuía uma visão geométrica aguçada, não via com bons olhos a crescente algebrizacão da Matemática, praticada por Bourbaki na França, na primeira metade do século XX, um dos motivos que o fez mudar para o Estados Unidos, em 1948, para trabalhar no Instituto de Pesquisa James Watson da IBM.

Mas como calcular a dimensão de uma forma fractal? Não é tão dramático. Peguemos o exemplo da costa brasileira e perguntamos: “Qual é o seu comprimento”?

Ele quis dizer que para medir o tamanho de um litoral ou limite territorial, é preciso, antes de tudo, definir a escala. Matematicamente falando, a escala para medir com exatidão uma extensão territorial deveria tender a zero, o que seria inviável, pois faria a extensão tender para infinito.

Alguns engenheiros da IBM tentavam solucionar um problema na transmissão de dados de um computador a computador, via linha telefônica, pois ocorria um ruído que interferia nessa transmissão. A corrente elétrica transmite a informação em pacotes separados e os engenheiros sabiam que quanto mais forte a corrente, melhor para afastar os ruídos. Esse problema foi estudado por Mandelbrot, que ao invés de tentar eliminar o ruído, fez o caminho inverso, pois os considerou inevitáveis. Percebeu que os erros vinham em grupos, que se ampliados, revelavam outros grupos menores em sua estrutura intercalada pelos dados da transmissão.

Desta forma, tratou os erros, de maneira semelhante ao conjunto de Cantor, programando os computadores para trabalhar assim, conseguiu fazer com que os receptores conseguissem diferenciar as informações transmitidas dos ruídos indesejáveis. Mesmo não eliminando a chegada dos erros, tornou a comunicação muito mais viável.

Embora os monstros matemáticos existissem há muito tempo, ainda ninguém lhes tinha atribuído um nome. Foi então que em 1978, Benoit Mandelbrot, ao preparar a sua primeira obra sobre os ditos ***monstros***, sentiu necessidade de lhes atribuir um nome, ficando então conhecido como o ***pai dos fractais***.

A geometria fractal permite a representação de certos elementos naturais que possuem características irregulares. Com a geometria fractal, torna-se possível a criação de modelos mais próximos da realidade. A geometria fractal fornece algoritmos para construção de formas idênticas as naturais e também ferramentas para o estudo das mesmas.

Fractais são objetos que podem ser obtidos geometricamente ou aleatoriamente, através de processos recursivos apresentando determinadas características que por vezes são encontradas em formas da natureza. Essas características são: auto similaridade, dimensão fractal e complexidade infinita.

As principais propriedades que caracterizam os fractais de acordo com Carreira, 2008:

A auto similaridade é a simetria através das escalas. Consiste em cada pequena porção do fractal poder ser vista como uma réplica de todo o fractal numa escala menor. Esta propriedade pode ser vista, por exemplo, na couve-flor.

A complexidade infinita, prende-se com o fato de o processo gerador dos fractais serem recursivo, tendo um número infinito de iterações.

A dimensão dos fractais, ao contrário do que sucede na geometria euclidiana, não é necessariamente uma quantidade inteira. Com efeito, ela é uma quantidade fracionária. A dimensão de um fractal representa o grau de ocupação deste no espaço, que tem a ver com o seu grau de irregularidade.

Na literatura encontramos algumas definições de fractal. Mandelbrolt, 1983, inicialmente usou conceitos de dimensão para defini-lo, admitindo como fractal, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica. Essa definição recebeu algumas críticas e também não satisfazia o próprio Mandelbrolt.

Enunciemos agora algumas definições dadas por outros autores:

Para J. FEDER apud BARBOSA (2005), “Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos”.

> Já para K. J. FALCONER apud BARBOSA (2005), “Um conjunto F é fractal se:
> -F possui alguma forma de auto similaridade ainda que aproximada ou estatística;
> -A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica;
> -O conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo.

Em nosso trabalho usaremos a seguinte definição de fractal, que apesar de simples, nos possibilita uma melhor compreensão do que é um fractal: “Fractais são objetos que apresentam auto similaridade e complexidade infinita, ou seja, sempre contém cópias, aproximadas ou não, de si mesmos e são gerados pela iteração de processos simples.” DUPOND apud BORSSOI (2005).

Quanto à dimensão, sabemos que o ponto possui dimensão topológica zero, as linhas unidimensionais dimensão um, as superfícies dimensão dois e os sólidos dimensão três, e embora não sejamos capazes de visualizar concretamente existem ainda dimensões maiores que três.

Segundo SERRA (p. 14, 1997), “A dimensão de uma figura, é uma dimensão topológica, que se exprime sempre como um número inteiro”.

Os fractais também são figuras que possuem dimensão topológica, no entanto, pode-se considerar o conceito de dimensão espacial que relaciona o espaço que a figura ocupa. Neste sentido, podemos observar que a ilha de Koch, por exemplo, ocupa mais espaço que uma curva simples e, no entanto, não ocupa um espaço do tamanho do plano que a contém. Logo, ela possui uma dimensão maior que um e menor que dois, ou seja, uma dimensão fracionária.

2.3.2. Fractais Clássicos

Observaremos o comportamento de três fractais clássicos, são eles: a ilha de Von Koch que tem perímetro infinito e área finita, embora esse fato possa parecer contrário a nossa intuição geométrica, é característica de muitas formas importantes na Natureza.

Ademais, o triângulo de Sierpinski que possui perímetro infinito e área tendendo a zero, embora esse fato também possa parecer contrário a nossa intuição geométrica e ao conjunto de Cantor, que apresenta a surpreendente característica de ter tanto ponto quanto a reta real, porém possui comprimento zero, desafiando com isso, definitivamente nossa intuição.

Os conjuntos de Cantor e de Sierpinski são gerados através de um processo de remoção de alguma parte da figura inicial enquanto que os conjuntos de Koch, Peano e de Hilbert são gerados através de um processo de alteração da figura inicial.

2.3.3. Ilha de Von Koch

O sueco Helge Von Koch, grande matemático, em 1904 foi o criador da curva de Von Koch que mais tarde originou a Ilha de Von Koch ou Floco de neve de Koch. Ambas baseiam-se no mesmo processo de construção, porém a diferença é que a curva tem como figura inicial um segmento de reta e a ilha, um triângulo equilátero composto por três desses segmentos de reta.

Iniciamos o processo com um triângulo equilátero. Na primeira iteração da construção, dividimos cada lado do triângulo em três partes iguais e construímos sobre cada um dos segmentos do meio, um novo triângulo equilátero, sem a base.

Obtivemos, portanto, a segunda figura do processo de construção com 12 lados. Repetimos o mesmo processo para cada um dos 12 segmentos obtidos na figura. Repetindo indefinidamente o processo, obtemos, no limite deste processo recursivo, a curva de Koch.

Observando a representação geométrica deste fractal podemos perceber facilmente que temos uma figura regular fechada cuja fronteira é composta por infinitos lados cada vez menores. Supondo que cada lado do triângulo inicial mede uma unidade, os lados de cada nova figura são três vezes menores que os da figura inicial.

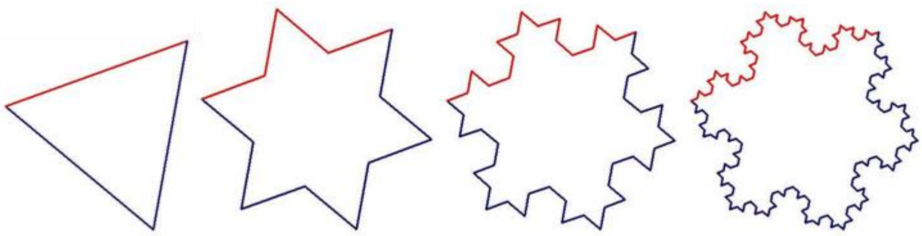

Figura 2- Primeiros quatro passos da construção da curva de Koch

Fonte: Internet.

2.3.4. Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski é uma figura geométrica que foi objeto de estudo do matemático polaco Waclav Sierpinski.

Iniciaremos a partir de um triângulo equilátero, depois, removemos o triângulo equilátero definido pelos pontos médios dos lados e obtemos a figura geradora. Repetimos continuamente o processo, ou seja, aplicamos a figura geradora em todos os triângulos equiláteros que não foram removidos e obtemos, no limite, o triângulo de Sierpinski.

Observando a figura abaixo, podemos verificar, em cada iteração, que a área do triângulo de Sierpinski, é igual a área do triângulo inicial multiplicada pelo fator 3/4 e que o seu perímetro é igual ao perímetro do triângulo inicial multiplicado pelo fator 3/2.

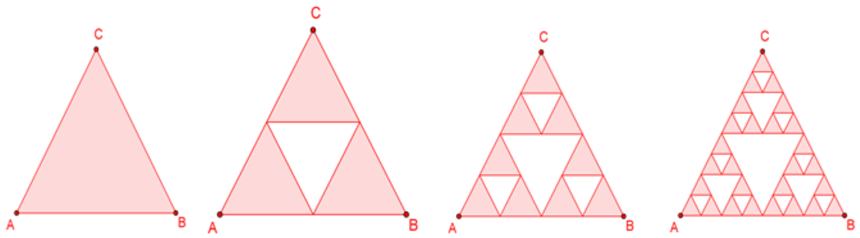

Figura 3 - Iterações no triângulo de Sierpinski

Fonte: Internet.

2.3.5. Conjunto de Cantor

George F. L. Philipp Cantor, foi um matemático russo de origem alemã, conhecido por ter elaborado a moderna teoria dos conjuntos. Cantor apresentou em 1883 o conjunto que pode ser considerado como uma das mais antigas construções denominadas patológicas encontradas na Matemática e que hoje leva o seu nome conjunto de Cantor.

A construção Geométrica do conjunto de Cantor recebe por vezes o nome de Poeira de Cantor. O processo é análogo ao da construção numérica. A diferença está em iniciar com um segmento de reta de comprimento unitário, e não com um intervalo numérico. Divide-se este segmento em 3 partes iguais e retiramos o seu terço médio. Essa é a primeira etapa, ou primeiro nível, da construção. Na segunda etapa, retiramos o terço médio de cada um dos segmentos restantes. E assim sucessivamente. Nota-se que, a cada nível, ficamos com 2 segmentos, que serão novamente tri seccionados. Logo, n = 2. A razão de semelhança desses segmentos com o segmento original é 1/3. Logo, r = 1/3. Portanto, a dimensão Fractal do conjunto de Cantor é dada por: $D = -\ln(2) / \ln(1/3) \approx 0{,}63$

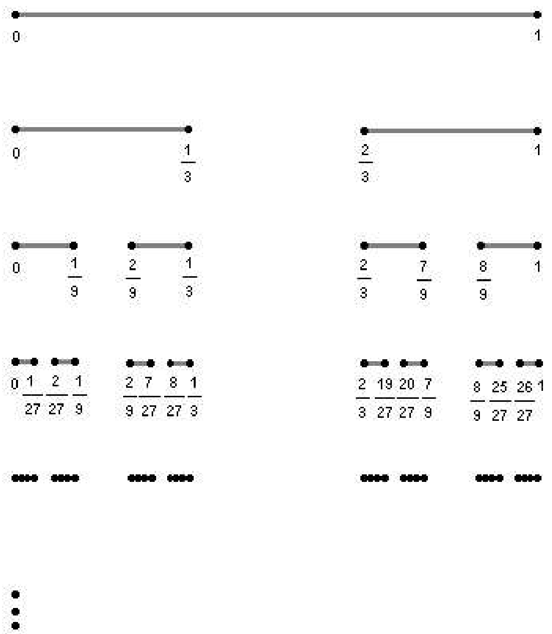

Figura 4 - Construção geométrica do conjunto de cantor

Fonte: Internet.

2.3.6 Conjunto de Julia

O conjunto conhecido por Conjunto de Julia foi criado pelos matemáticos Pierre Fatou e Gaston Julia em 1919. Esse conjunto, obtido por iterações no plano complexo, resultou da curiosidade de determinar o que aconteceria com um número complexo z quando a este fosse aplicado iterativamente a função $f(t) = z^2 + c$, onde c é um número complexo. Apenas com os modernos computadores foi possível visualizar a beleza dos gráficos de tais funções.

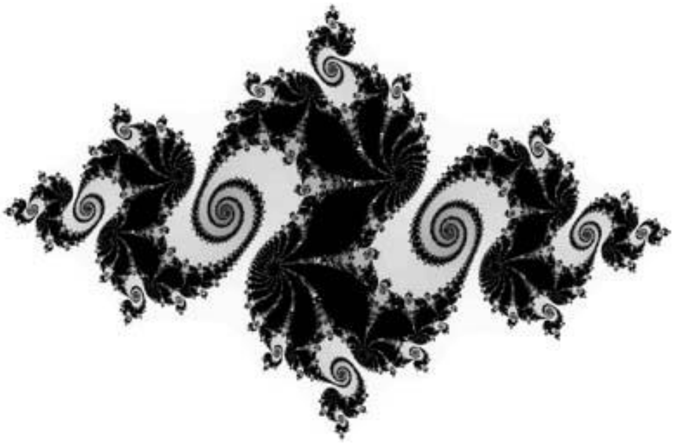

Figura 5 - Conjunto de Julia

Fonte: Internet.

2.3.7 Conjunto de Mandelbrot

O fractal que tem o nome de Conjunto de Mandelbrot, também obtido no plano complexo, é considerado uma expansão do Conjunto de Julia, pois cada ponto no plano complexo corresponde a um conjunto de Julia diferente. Os pontos que pertencem ao conjunto de Mandelbrot correspondem precisamente aos conjuntos de Julia conexos e os pontos fora do conjunto de Mandelbrot correspondem aos conjuntos de Julia desconexos. Este conjunto, talvez seja o mais complexo objeto conhecido pelos matemáticos, como revelam as imagens geradas por computador. À medida que ela é examinada em níveis cada vez mais altos de ampliação, o observador vê-se diante de um desfile interminável de voltas, rendilhados e formas que se assemelham à totalidade do conjunto.

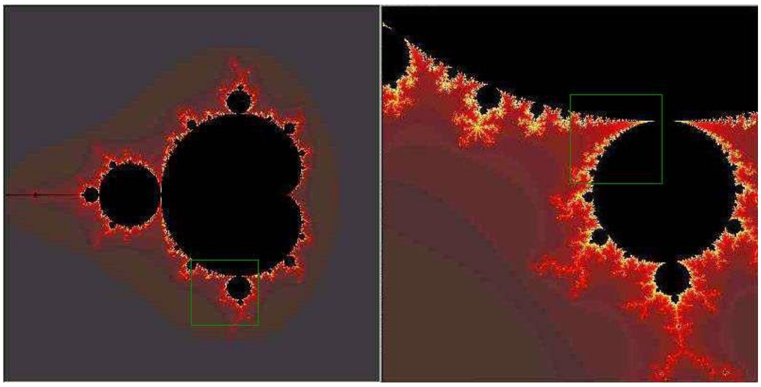

Figura 6 - Conjunto de Mandelbrot

Fonte: Internet.

3. MATERIAIS E MÉTODOS

Realizou-se uma pesquisa através de busca detalhada sobre o tema fractais, sobre a problemática do ensino de Física no Ensino Médio atualmente, e sobre a união destes dois temas, utilizando como fonte diversos meios, como: aulas áudio visuais, fractais naturais encontrados em nosso cotidiano e confecções de cartões fractais.

Algumas pesquisas foram feitas em livros, revistas, dissertações de mestrado, teses de doutorado, e artigos de diversos tipos e níveis de aprofundamento para verificar até que ponto a Geometria Fractal poderia ser abordada em sala de aula objetivando benefícios ao processo de ensino-aprendizagem sem perder o objetivo do conteúdo principal abordado na aula.

Com intuito de compreender do que se tratava e se o tema estaria adequado a turmas do Ensino Médio, foi realizada uma pesquisa em forma de questionário sobre fractais para verificar que conceitos os alunos teriam sobre o tema abordado.

A pesquisa se faz necessária durante a elaboração do questionário, para que novos conceitos e ideias sejam assimilados, utilizando os seus subsunçores e incorporando dentro do contexto daquilo que se busca no questionário. Além disso, também tem o objetivo de esclarecer dúvidas que possam aparecer durante a sua aplicação.

Nesta técnica de investigação composta por questões apresentadas por escrito, os pesquisadores têm a intenção de identificar o conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas e outras (GIL, 1996).

Para DENCKER (2001), o questionário e a entrevista são os mais frequentes e possuem em comum o fato de serem constituídos de uma lista de indagações que, se respondidas, dão ao pesquisador a informação necessária.

Foi escolhido o uso de questionário, pois, segundo DENCKER (2001):

> Permite analisar aspectos subjetivos e objetivos e, portanto, o estudo direto dos fenômenos sociais; permite perguntas sobre fatos e opiniões; pode ser aplicado a um grande número de pessoas simultaneamente; permite a obtenção de uma grande quantidade de informações com referência a aspectos bastante diversificados, garante certa uniformidade das respostas devido ao caráter padronizado das perguntas, instruções etc.

O questionário foi autoaplicável, feito para ser preenchido pelos próprios respondentes, composto por perguntas abertas.

Elaborou-se formulários com questionários que contem cinco perguntas, envolvendo nesse formulário dados escolares dos alunos, perguntas sobre o conhecimento do mesmo em relação às aulas de Geometria, principalmente a geometria Euclidiana, os conteúdos e a forma como eram transmitidos

3.1. APLICAÇÕES DOS QUESTIONÁRIOS

Aplicou-se o questionário aos alunos do 1º ao 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública situada na cidade de Várzea Grande – MT, tendo em vista que alunos dessas séries possuem algum conhecimento de geometria, e pode representar melhor a aprendizagem.

A Escola Estadual Maria da Cunha Bruno, situada na Avenida A SN no bairro Jardim Primavera, localizada nas coordenadas 15°41’20.88”S 56°7’59.65”W, possui um total de 812(oitocentos e doze) alunos, sendo desse total 371(trezentos e setenta e um), pertencentes ao Ensino Médio, entre esse total foi feita a pesquisa com apenas 100 (cem) estudantes, com idade entre 15 e 20 anos. Aplicou-se o questionário, somente com aqueles que estudam nos períodos matutino e vespertino, sendo 1(uma) turma do 1° ano matutino como 24(vinte e quatro), 2(duas) turmas do 2° ano, uma matutino e outro vespertino com 21(vinte e um) e 22(vinte e dois), respectivamente, 1(uma) do 3° ano noturno com 18(dezoito) e 1(uma) turma do 1° ano EJA noturno com 15(quinze) alunos.

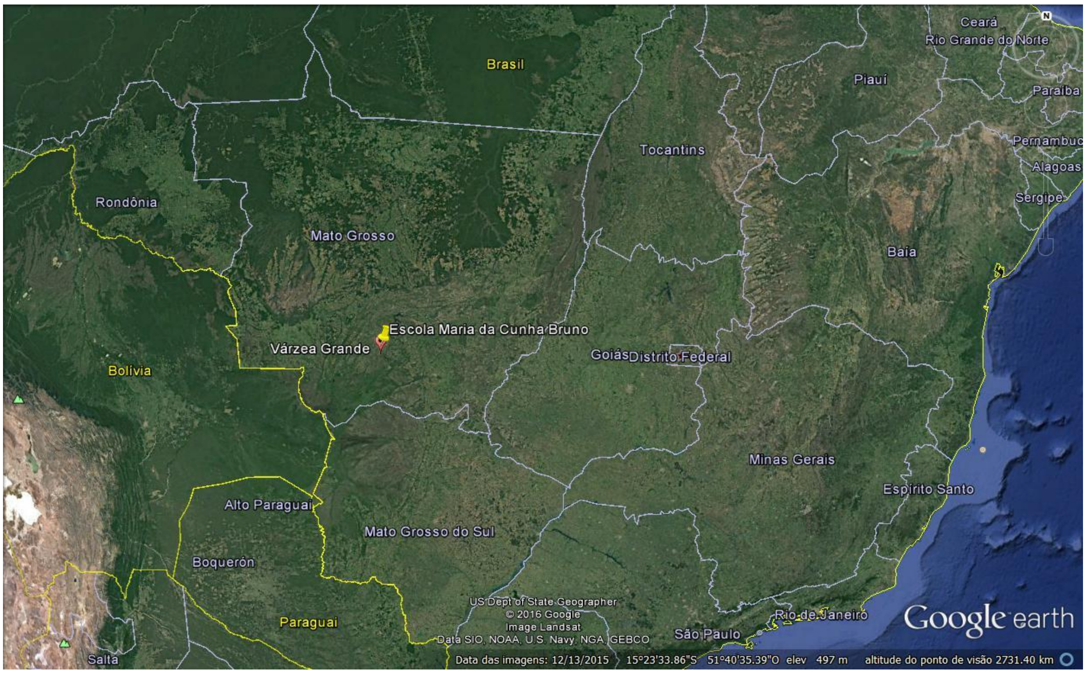

Figura 7 - Localização da Cidade de Várzea Grande-MT

Fonte: Google Earth.

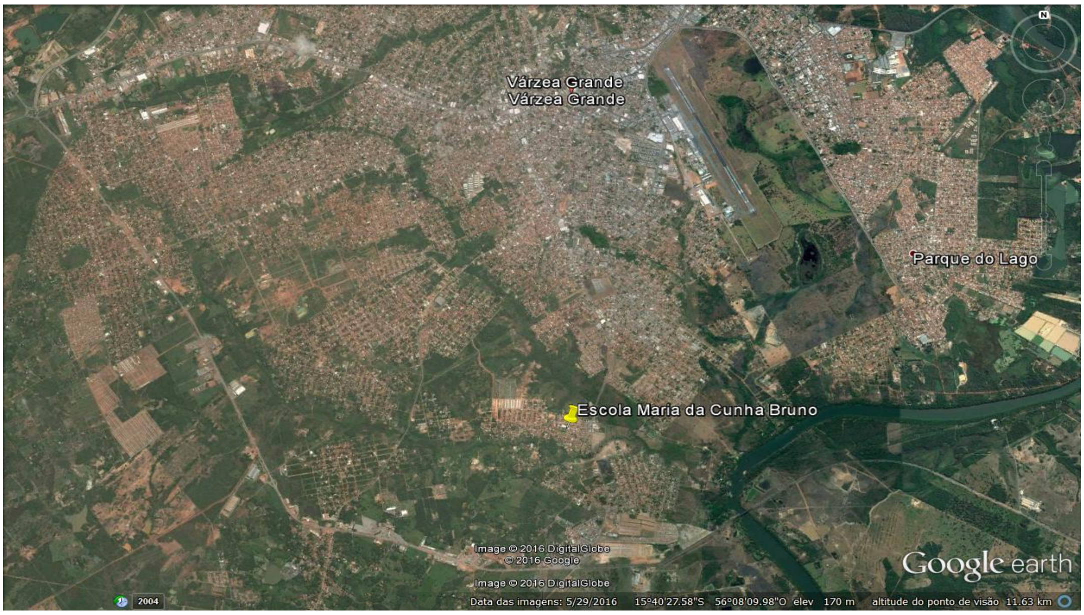

Figura 8 - Localização do Bairro Jardim Primavera na Cidade de Várzea Grande-MT

Fonte: Google Earth.

Figura 9 - Fachada da Escola Prof. Maria da Cunha Bruno

Fonte: Fotografia registrada pelo autor.

A coleta de dados na escola ocorreu em períodos diferentes, sendo matutino e noturno, em alunos com diversos estilos de vida e idades diferentes, para obter diversas opiniões em relação à Geometria Fractal e a didática aplicada.

A pesquisa teve caráter misto (qualitativa-quantitativa), pois será descrito como se deu a aplicação da metodologia de ensino.

Acreditamos ser a pesquisa qualitativa a melhor a perspectiva investigativa a ser seguida. Conforme BOGDAN; BIKLEN (1994), são cinco as características da investigação qualitativa:

> 1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. O comportamento humano é significativamente influenciado pelo contexto em que ocorre, de modo que, sempre que possível, o investigador deve se inserir no local de estudo.
> 2. A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Tentam analisar os dados em toda sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos.
> 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. Dissociar os processos dos resultados é deixar de verificar uma série de questões que podem revelar como os mesmos foram obtidos.
> 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma intuitiva. Não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas na medida em que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando.
> 5. O significado tem importância vital na abordagem qualitativa. A

> preocupação com as chamadas perspectivas participantes, isto é, o registro tão rigoroso quanto possível do modo como as pessoas interpretam os significados. (TOURINHO; AGUIAR, 2011).

A proposta visa propor indicativos possíveis para mudança curriculares, procedimentais e atitudinais. Durante as aulas, devido o envolvimento do pesquisador com o grupo escolhido, é coerente a sua classificação como pesquisa-ação.

A pesquisa-ação segundo BOGDAN; BIKLEN (1994) "consiste no recolhimento de informações sistemáticas com o objetivo de promover mudanças sociais". O conhecimento direto dos fatos significa aumentar a consciência e dedicação relativamente a questões particulares (TAVARES, 2011).

Logo após aplicação do questionário, foi feita uma investigação qualitativa das respostas, verificando as opiniões de cada um e se os alunos tinham em algum momento percepções parecidas com relação ao ensino de geometria.

Depois do questionário respondido foi possível perceber quais as maiores dificuldades dos alunos e o que eles gostariam de aprender. Então se iniciou o processo de formulação de um plano de aula juntamente com um material para os alunos sobre fractais.

3.2. APLICAÇÕES DAS AULAS

O material consta de uma aula de introdução sobre a Teoria da Complexidade, desde seu surgimento e os seus efeitos na mudança de paradigma dentro da ciência no século XX e sobre o que são fractais em breve histórico, seguido de suas principais características e figuras contendo exemplos de objetos no cotidiano com características fractais (brócolis, árvore, folha, pulmão humano, nuvens, rios).

A primeira parte do material fornece ideias principais sobre a Geometria Fractal para que possa estimular os alunos através das formas e mostrar a eles algumas aplicações da física e a geometria no cotidiano.

Após a introdução sobre a geometria do fractal, um estudo realizado acerca do que consiste a Geometria Fractal, fez-se a construção da atividade descrita a seguir e intitulada Construindo Cartões Fractais, conforme o que foi sugerido por ALMEIDA et al. (2011). Para os autores, trata-se de uma proposta de atividade que permite introduzir a Geometria dos Fractais por meio da construção de cartões Fractais em três dimensões, explorando as características que definem esse conjunto e a geometria euclidiana envolvida no processo de construção.

As aulas e o material seguem o mesmo princípio, sendo o primeiro voltado para o professor, contendo explicações mais detalhadas e resolução de exercícios, e o segundo para os alunos, com uma linguagem mais clara e direta, e explorando mais as figuras.

Após a apresentação da aula sobre a Geometria Fractal, foi aplicado um segundo questionário objetivando analisar a percepção dos alunos sobre qual natureza que eles conheciam no seu cotidiano e para que citassem alguns exemplos, a partir do pressuposto de que as aulas se tornariam mais ilustrativas e prazerosas caso fossem apresentados assuntos como a Geometria Fractal durante as aulas.

A aula foi ministrada pelo pesquisador e foi utilizado o recurso de data show, e dobraduras feitas utilizando cola, tesoura e régua. No decorrer da exposição da aula foi possível observar as principais dúvidas dos alunos, o comportamento e a postura deles perante o tema apresentado.

O questionário respondido e a observação do comportamento dos alunos realizados pelo pesquisador durante a apresentação das aulas foram extremamente úteis para chegar ao resultado da pesquisa.

Como aplicação das aulas e dos questionários foi na escola pública, os aspectos éticos da educação foram seguidos, de forma que antes de qualquer procedimento foi realizada uma reunião com a diretora e os professores, principalmente os de matemática, para explicar os objetivos e finalidades da pesquisa.

Os alunos em nenhum momento foram forçados a participar da pesquisa. O pesquisador estava como professor na unidade escolar, e não descumpriu as metas de ensino que são solicitadas nos PCN´s de Física.

3.3. COLETA DE DADOS

A seguir a sequência correspondente ao conteúdo programático das aulas e mídia visual:

1-Aplicação do questionário

2-Teoria da Complexidade Sistema Abertos: sistemas; sistemas fechados; sistemas isolados; sistema dinâmicos ou abertos.

3-Objetos Fractais: dimensionalidade dos objetos; conjunto de cantor; conjunto de Mandelbrot; semelhanças; auto semelhança; aplicações da geometria fractal; matemática fractal.

1- Primeira aula

O início da pesquisa foi feito por um questionário para saber o conhecimento e a percepção dos alunos em relação ao tema proposto.

3.3.1 Descrições das ações promovidas na escola

Iniciou-se as aulas com apresentação em multimídia, de uma ferramenta aplicada no Instituto de Física. Foram apresentadas questões motivadoras que viriam ganhar nova perspectiva sob a visão da Teoria da Complexidade, organizadas segundo a seguinte sequência de temas:

2- Segunda aula.

A segunda aula começou reiniciando as discussões da aula anterior. Na perspectiva da reconciliação integradora e diferenciação progressiva da TAS. Essa retomada do tema abordado na aula anterior facilita a relação entre professor e aluno e ajuda na externalização dos subsunçores que estão sendo estruturados nos aprendizes.

Trabalhar a Geometria Fractal é o objetivo da aula. Os estudos recentemente têm mostrado que modelos matemáticos euclidianos não são os mais apropriados para representar a natureza, porque as formas encontradas na natureza, na sua maioria não são círculos e triângulos, conforme definidos na geometria clássica de Euclides (330 a.C), cujos teoremas possuem lugar de destaque nos textos matemáticos (TAVARES, 2011).

Figura 10 - Aula audiovisual

Fonte: Fotografia registrada pelo autor.

3- Terceira aula - Construindo cartão fractal através de dobraduras.

A construção de cartões fractais, por meio de dobraduras, é uma forma diferente e prazerosa de apresentar a geometria dos fractais para os estudantes de Ensino Médio.

Por ser um trabalho diferente, uma “quebra” da rotina das aulas de matemática, motiva e envolve os alunos.

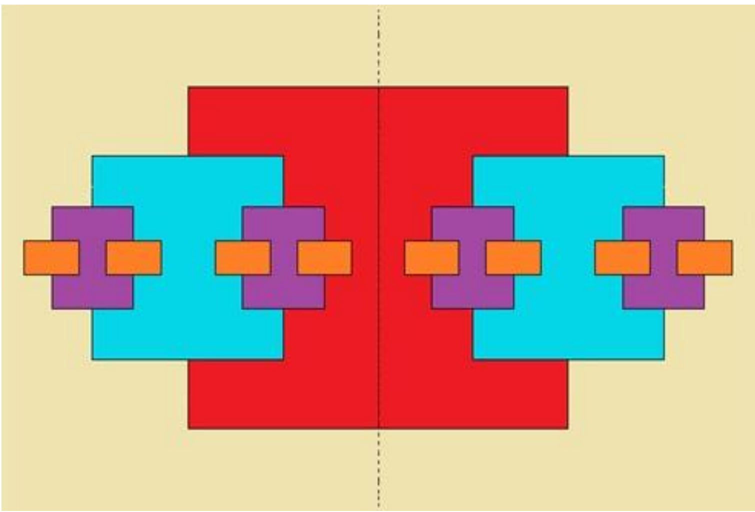

Figura 11 - Cartão Fractal

Fonte: MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2011.

Algumas Etapas para confecção de um Catão Fractal com dobraduras:

1º Etapa - Pegue uma folha de tamanho A4;

2º Etapa - Dobre a folha ao meio, ao longo de sua altura;

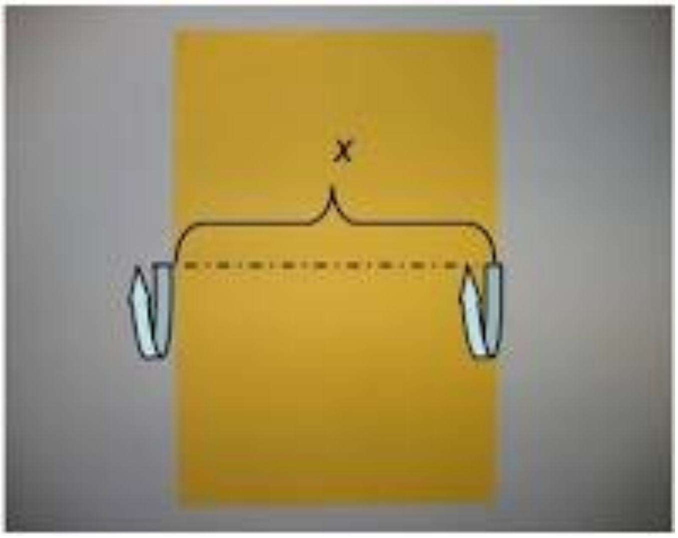

Figura 12 - Construindo cartão fractal etapa 2

Fonte: Internet.

3º Etapa - Com a folha dobrada ao meio, faça dois cortes verticais simétricos com a distancia $\frac{x}{4}$ das extremidades da folha, de altura $\frac{a}{2}$. Note que a=2X $\frac{x}{4}$ X $\frac{x}{2}$.

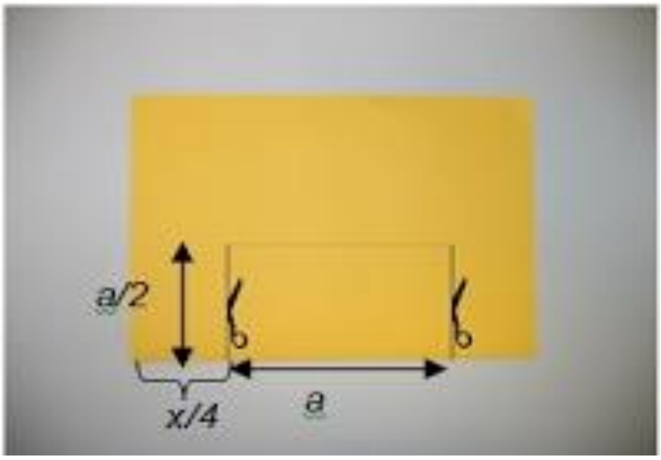

Figura 13 - Construindo cartão fractal etapa 3

Fonte: Internet.

4º Etapa - Dobre o retângulo formado para cima, fazendo um vinco na obra;

Figura 14 - Construindo cartão fractal etapa 4

Fonte: Internet.

5º Etapa - Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe o centro da figura em relevo;

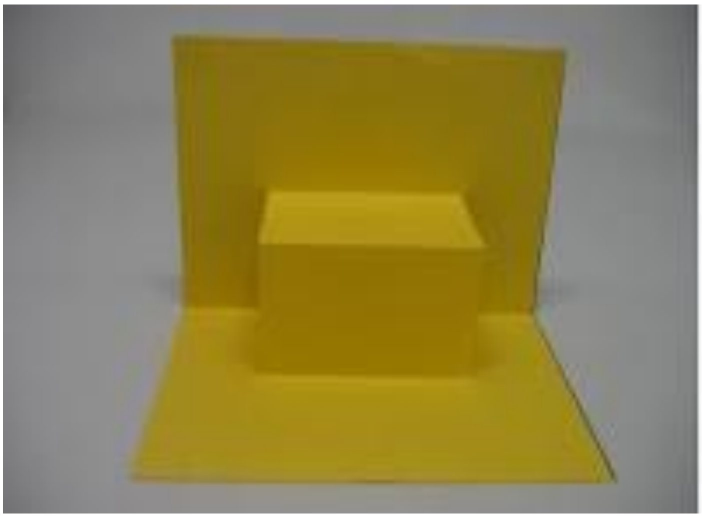

Figura 15 - Construindo cartão fractal etapa 5

Fonte: Internet

6º Etapa - Para obter as próximas iterações, devemos proceder da mesma forma, porém em uma escala menor, apenas na região dobrada.

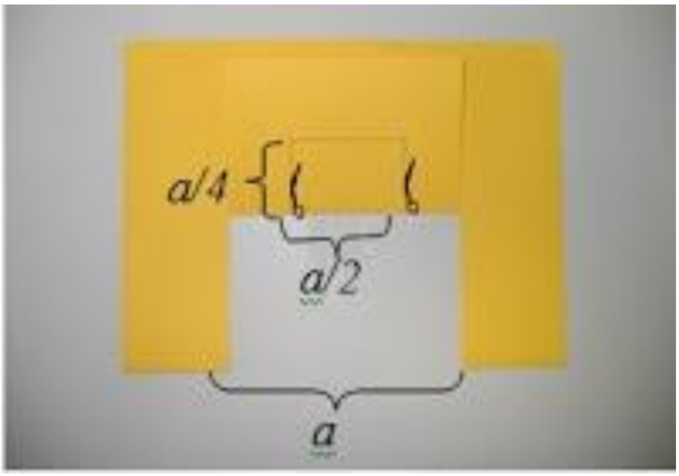

Figura 16 - Construindo cartão fractal etapa 6

Fonte: Internet.

7º Etapa - Dobre o retângulo para cima fazendo um vinco na dobra;

Figura 17 - Construindo cartão fractal etapa 7

Fonte: Internet

8º Etapa - Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe a figura em relevo.

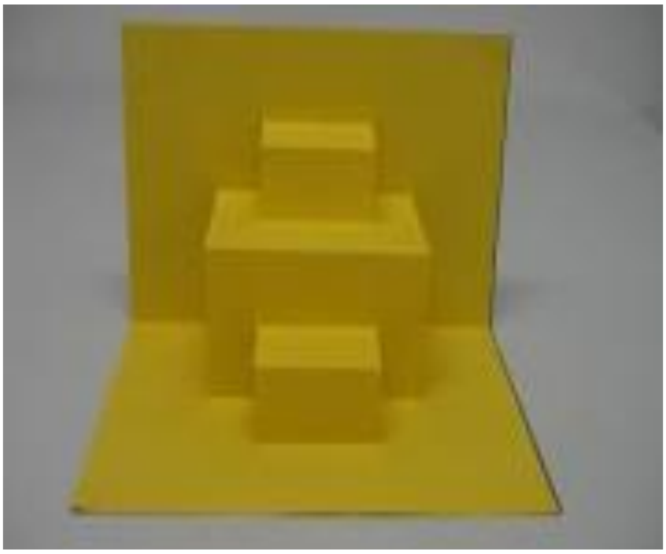

Figura 18 - Construindo cartão fractal etapa 8

Fonte: Internet

9º Etapa - Para obter mais gerações, é necessário repetir esse processo.

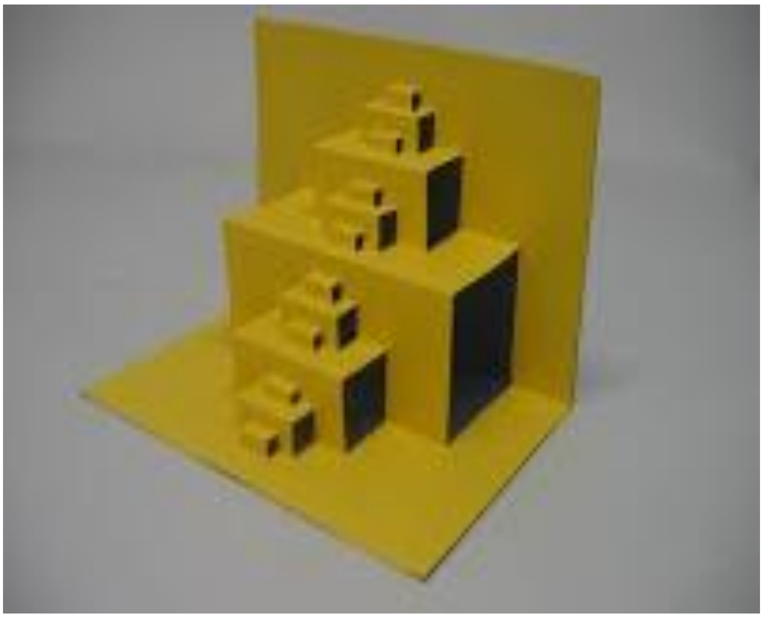

Figura 19 - Construindo cartão fractal etapa 9

Fonte: Internet

Após essas etapas, a figura fica mais ou menos assim:

Figura 20 - Confeccionando cartão fractal através de dobraduras

Fonte: Fotografia registrada pelo autor.

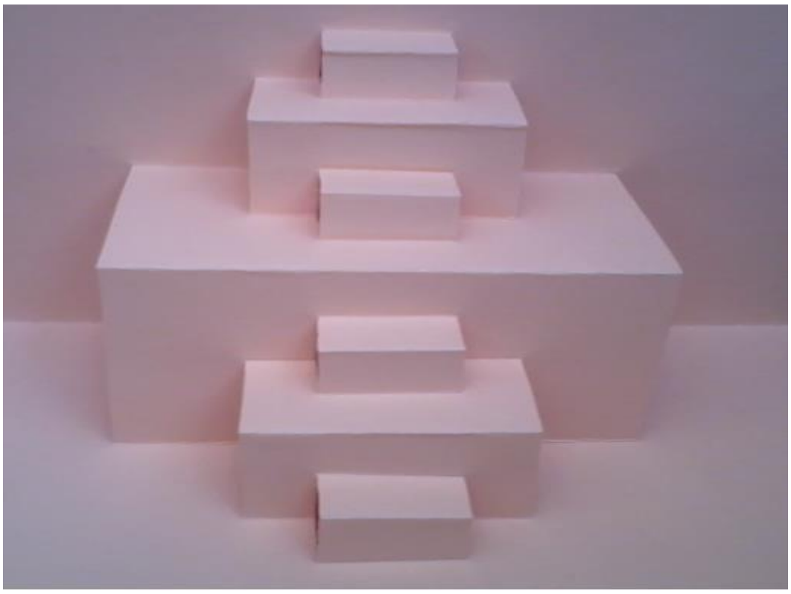

Figura 21 - Cartão fractal Degraus pronto

Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Percebemos durante a construção que, a cada novo corte e dobradura, obtemos novos degraus. Chama-se de interação zero a primeira geração do cartão. Quantos degraus novos surgem a cada interação?

Podemos explorar a construção do cartão construindo tabelas.

Tabela 1 – Interações para elaboração de cartão fractal

Interação	Números de degraus novos
0	1
1	2
2	4

3	8
4	16
N	2^n

A cada interação, o número de nos degraus dobra, porém em escala menor. Com isso, podemos concluir que o processo de construção dos degraus em cada interação é descrito pela lei de potência $2^{n,}$ onde n= 0,1,2, 3… Onde n é o números das interações. Identificamos que a cada nova interação temos um degrau cercado por 2 novos degraus. Este valor será denominado multiplicador.

Cartão Fractal (Triangulo de Sierpinski).

1º Passo - Encontre a metade, tanto da parte horizontal como da vertical, da folha. Então recorte na horizontal até o ponto de encontro das duas retas e dobre para a esquerda.

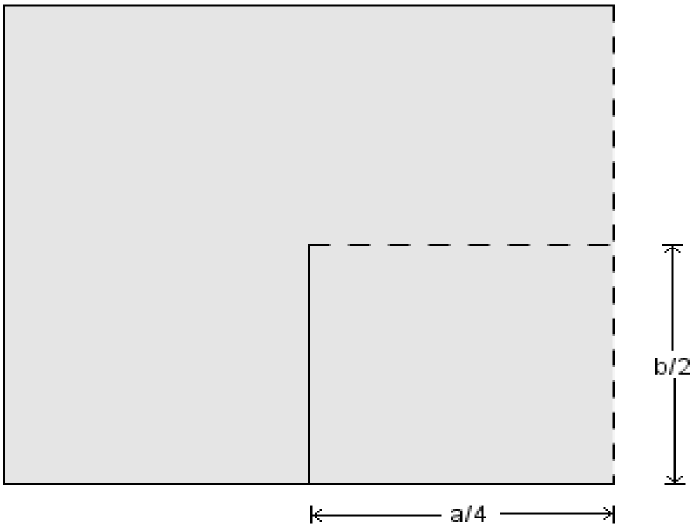

Figura 22 - Figura geométrica 1

Fonte: Internet.

Figura 23 - Figura geométrica 2

Fonte: Internet.

2º Passo - Repita o mesmo processo com a parte de cima e de baixo do hexágono obtido.

Após a terceira interação, vamos ter algo assim:

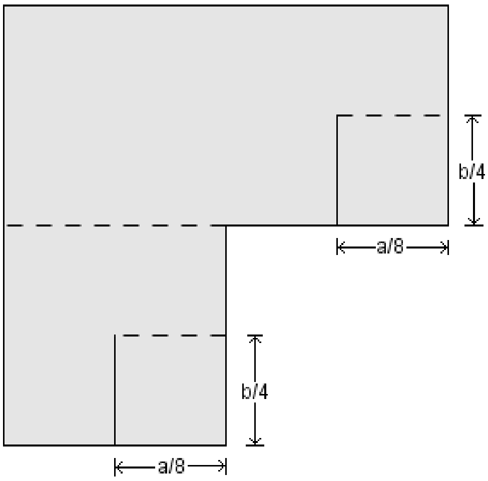

Figura 24 - Figura geométrica 3

Fonte: Internet.

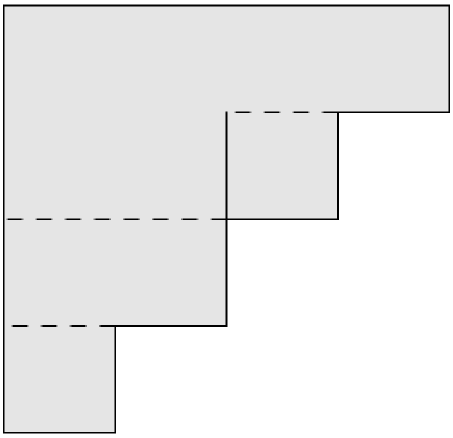

Figura 25 - Figura geométrica 4

Fonte: Internet.

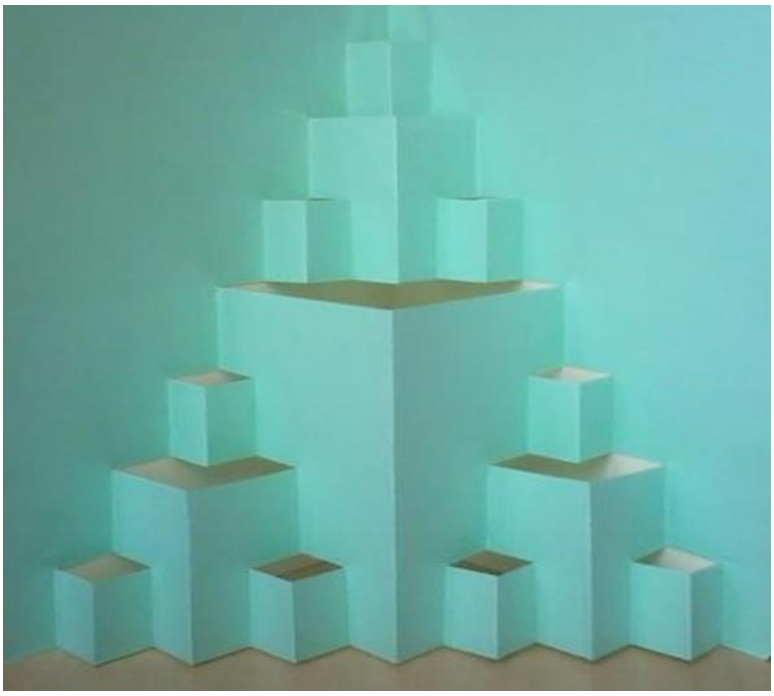

Figura 26 - Cartão fractal Triângulo de Sierpinski pronto

Fonte: Desenvolvido pelo autor.

4. APLICAÇÃO DE ALGUNS FRACTAIS EM SALA DE AULA ENCONTRADOS NA NATUREZA

Aplicou-se uma aula de mídia falando sobre a Teoria da Complexidade, e também sobre a Geometria Fractal, explorando seus subsunçores, para melhor desenvolvimento do conteúdo em sala de aula.

Depois da apresentação sobre fractais na natureza em nosso cotidiano, apresentou-se os seguintes métodos para melhor entendimento sobre fractais:

1° Passo - Coloca um Brócolis ou uma couve-flor, para que eles possam observar.

Figura 27 – Brócolis

Fonte: Internet.

2° Passo – Divida esse Brócolis em vários pedaços, verificando se eles conseguem observar a auto similaridade do legume.

Figura 28 - Brócolis Fragmentado

Fonte: Internet.

3° Passo - Verifique os conteúdos abordados: Os alunos deverão fazer a comparação entre as geometrias euclidianas, aspectos e diferenciação das não – euclidianas, neste caso, os fractais.

4° Passo - Mostrar mais alguns fractais encontrados na natureza em mídia:

Figura 29 – Brócolis

Fonte: Internet.

Figura 30 – Babosa

Fonte: Internet.

Figura 31- Galho de Samambaia

Fonte: Internet

Figura 32 – Relâmpagos

Fonte: Internet.

Figura 33 - Árvore Sangue de Dragão

Fonte: Internet.

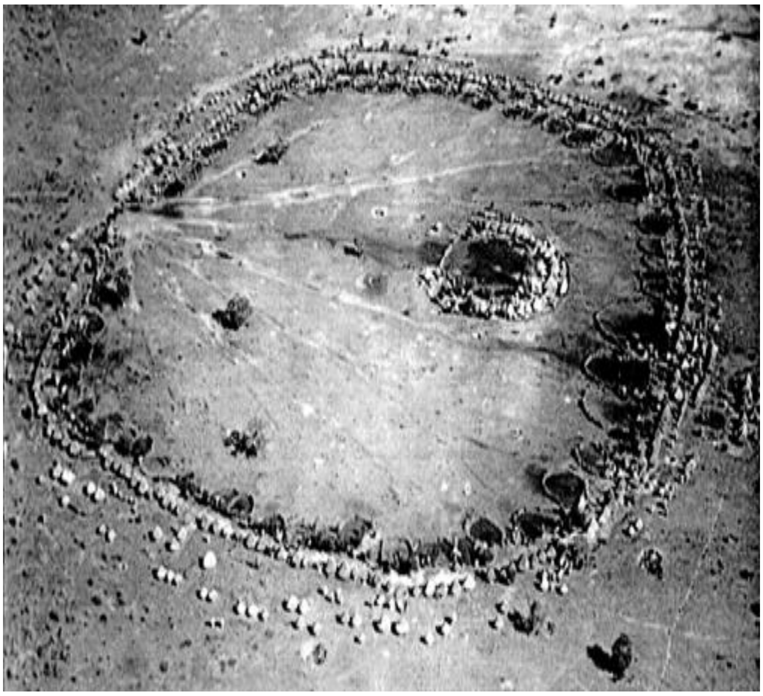

Figura 34 - Vista aérea da Vila Bai-La no sul de Zambia

Fonte: Internet.

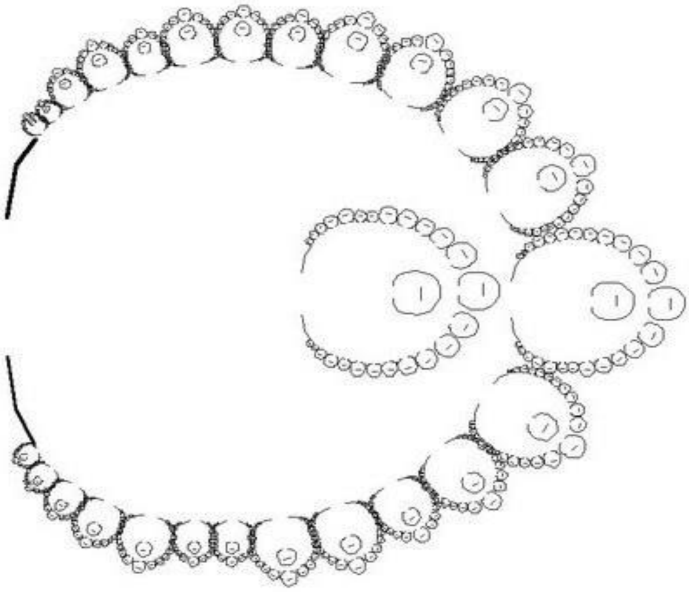

Figura 35 - Arquitetura - O padrão fractal da Vila Bai-La

Fonte: Internet.

5. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Levando-se em consideração a importância de se trabalhar os conceitos científicos no Ensino Médio, desenvolveu-se em uma escola pública de Várzea Grande – MT, do 1° ao 3ºano do Ensino Médio, durante o último bimestre do ano letivo de 2015, uma proposta diferente para o Ensino de Física. O objetivo principal foi criar uma oportunidade dos alunos discutirem assuntos científicos, relacionando o novo conceito com os conhecimentos de Física.

Aplicou-se um questionário prévio em aulas de física na qual o pesquisador atuou como professor. Procurou-se organizar as atividades dentro dos conteúdos programáticos para aquele bimestre, e foram utilizadas aulas expositivas e em mídia visual em que os alunos pudessem observar e aprender sobre fractal, testando suas curiosidades e formulando suas explicações sobre o tema estudado, para ampliarem, dessa forma, seus conhecimentos sobre a geometria da natureza e para melhorarem sua maneira de ver o mundo. Procurei valorizar o conhecimento prévio que os alunos tinham sobre os assuntos discutidos.

Todas as atividades propostas foram trabalhadas em sala de aula, e, quando necessário, os alunos eram divididos em grupos para facilitar o trabalho das experiências realizadas.

Figura 36 - Alunos do 3º ano divididos em grupos

Fonte: Fotografia registrada pelo autor.

Em todas as atividades propostas, os alunos foram levados a adquirir conceitos físicos que estão presentes no dia-a-dia, aproximando-os assim, do conhecimento científico, modificando sua forma de pensar e de comunicar. Embora ainda com dificuldades geométricas, conseguiram organizar seus pensamentos e chegaram a dar explicações coerentes a respeito do fato observado.

Em todo o desenvolvimento das atividades até a sua conclusão, pode-se observar o interesse de cada grupo sobre o resultado final. Os alunos eram motivados pela curiosidade e suas indagações. É nesse viés que este tipo de ação ganha significado, pois promove o desenvolvimento de atividades de comportamento investigativo e reflexivo, como preconiza os princípios da TAS, partindo dos conhecimentos prévios de cada aluno.

Foi levantado o perfil dos participantes e do arcabouço teórico desse trabalho nos remetemos a seis questionamentos que incluímos no questionário com temáticas tais como:

1) Você conhece ou já ouviu falar no termo fractal?
2) Se considerar uma folha de uma árvore, qual é o formato dela?
3) Como você descreveria o formato de uma nuvem?
4) Observe atentamente a figura e descreva quais são as características (A figura e uma imagem de triângulo de sierpinski).
5) Observe atentamente a figura e descreva quais são as características (A figura e uma imagem de uma couve flor).
6) O que significa Fractal?

As perguntas com os alunos.

Analisou-se as questões individualmente, para facilitar o entendimento dos leitores.

Para desenvolver este trabalho, levou-se em consideração o que AUSUBEL (2001) propõe: a nova informação interage com uma estrutura de conhecimento específico pré-existente na estrutura cognitiva do aluno.

Questão 1: Você conhece ou já ouviu falar no termo fractal?

De acordo com as respostas dos 100(cem) alunos que responderam o questionário, apenas 2(dois) responderam que já ouviram falar do termo, e 98(noventa e oito) responderam que nunca ouviram falar e nem conhece.

Os dois alunos que responderam sim, somente ouviram falar, sendo que um deles veio de um país vizinho onde a geometria fractal está inserida no plano de ensino, e o outro veio de uma escola particular de outro Estado.

Teve-se um número significativo nessa categoria de resposta, o que nos permite inferir que os tópicos que apresentamos no curso eram inéditos para esses alunos.

Observou-se com o resultado desta questão o relata MOREIRA (1997), que "quando uma nova informação se ancora em conceitos relevantes pré-existentes na estrutura cognitiva de quem aprende, consideramos uma aprendizagem significativa".

CAZZELI (1992), aponta que as atividades realizadas servem como uma metodologia que estimula o aluno a formar mecanismos lógicos relacionados com a sua experiência pessoal para compreender os processos que ocorrem a sua volta dando assim passos importantes no caminho científico. "Essas adaptações metodológicas são importantes para estimular o convívio do aluno com os conteúdos aprendidos em sala." (SONCINI; CASTILHO,1990, pag.5).

Questão 2: Se considerar uma folha de uma arvore, qual é o formato dela?

A partir da observação da imagem na questão, os alunos puderam pensar em uma resposta na qual se aproximava mais da qual esperávamos.

Portanto, quando o aprendiz tem pela frente um novo corpo de informações e consegue fazer conexões entre esse material que lhe é apresentado e o seu conhecimento prévio em assuntos correlatos, ele estará construindo significados sobre o conteúdo apresentado. Essa construção de significados não é uma apreensão literal da informação, mas é a uma percepção substantiva do material apresentado, e desse modo se configura como uma aprendizagem significativa (TAVARES, 2011).

Observou-se na questão citada, que do total de alunos, 87(oitenta e sete) alunos responderam ter o formato de um triângulo, 7(sete) disseram parecer um círculo e oval, 4(quatro) disseram ser parecido com dedo polegar e retângulo, os outros disseram ser parecidos com coração e gota d'agua, sendo 1(um) cada. Diante dessa resposta, pode-se observar que o conhecimento que eles têm é das formas geométricas euclidianas.

E podemos observar ainda, que é preciso ter uma imaginação excepcional para considerar a possibilidade de uma geometria diferente daquela de Euclides, pois o espírito humano por dois milênios esteve limitado, pelo preconceito da tradição.

Para EVES (1992), há uma firme crença de que o sistema de Euclides era certamente a única maneira de descrever em termos geométricos o espaço físico, e que qualquer sistema geométrico contrário não poderia ser consistente.

A elegância da geometria não está somente na sua beleza ou na consistência de suas teorias, mas principalmente para que, a partir dela, o homem amplie seu conhecimento e, por conseguinte, compreenda melhor o mundo no qual ele vive.

Questão 3 – Como você descreveria o formato de uma nuvem?

Nesta questão pode-se observar a dimensão dos pensamentos dos alunos, pois vai desde a geometria euclidiana até algumas imagens relacionadas ao cotidiano.

Propondo essa questão, colocando uma imagem de uma nuvem no céu em um dia claro, observou-se, que aqueles que disseram que parecia com o formato de uma figura geométrica, foram os que se destacam nas aulas de física e matemática, com seus interesses e suas curiosidades.

Alguns observaram somente a figura que estava exposta no questionário, responderam sobre a imagem que essa figura estava aparentando, não vendo que o objetivo era que eles observassem a aparência de alguma figura geométrica.

Dos 100(Cem) alunos que participavam do questionário somente 67(sessenta e sete) vieram a responder, os outros 33(Trinta e Três) alunos deixaram em branco a questão, não quiseram responder.

É interessante notar que possivelmente a grande variedade de respostas se deve ao fato de que não existem formas geométricas euclidianas que se aproximem do formato das nuvens.

As respostas que foram citadas foram: triângulo, mapa, ondas do mar, retângulo, nada, fumaça, cilindro, hexágono, montanha, gelo derretendo, vários formatos e gráfico. Dentre elas a resposta com vários formatos foi a que teve maior quantidade com um número de 12(doze) respondentes, seguida da resposta, montanha e gráfico com 7(sete), ondas do mar com 6(seis), algodão doce e triângulo com 5(cinco), nada, fumaça e cilindro todas com 3(três), retângulo e mapa com 2(dois), e o restante das respostas com apenas 1(um) respondente.

Questão 4 – Observe atentamente a figura e descreva quais são as características (A figura é uma imagem de um Triângulo de Sierpinski).

O intuito da aplicação desta questão foi para que os alunos pudessem verificar a auto semelhança dos triângulos, pois é uma das características da geometria fractal.

Diante da figura exposta no questionário, começaram a surgir algumas indagações e curiosidades, pois até então nenhum deles tinha visto essa figura, conheciam o triângulo, mas nunca tinha observado essa repetição.

> Segundo NUNES (2010), a exploração da geometria fractal, em contexto de sala de aula, proporciona o desenvolvimento das atitudes, dos valores e das competências dos alunos, na medida em que promove a curiosidade e o gosto de aprender, de pesquisar e de investigar, promove a pesquisa de padrões e regularidades formulando em seguida generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos.

Nessa questão do quantitativo de 100(cem) alunos, somente 86(oitenta e seis), responderam à questão, e destes, somente alguns puderam aproximar-se do objetivo específico, que era ver a auto similaridade.

Observou-se que as respostas se aproximavam do esperado, sendo que triângulo foi o maior número, com o quantitativo de 36(trinta e seis), seguido de triângulos com vários triângulos com 29(vinte e nove), pirâmide com 15(quinze), pirâmides e triângulos com 5(cinco) e taças apenas 1(um).

Outra constatação interessante foi aquele aluno que observou a figura como taças, pois na interação do triângulo os outros triângulos formados são invertidos, aparentando ser taças.

A geometria euclidiana está presente em seus conhecimentos, pois todos os pesquisados observaram e nomearam a figura como sendo um (Triângulo), mas ficaram com receio de responder pois acharam que estaria muito fácil só essa resposta.

Para os fractais, em especial para a geometria fractal, faz-se necessário ao educador conseguir captar o educando com o transparecer de sua própria vibração, e talvez evidenciando o êxtase na complementação na beleza de seus visuais, conduzindo-o ao prazer pelas informações e conhecimentos culturais da vasta variedade de fractais (BARBOSA, 2005).

Questão 5 - Observe atentamente a figura e descreva quais são as características (A figura e uma imagem de um Brocolis).

Nessa questão foram colocadas duas figuras do legume brócolis, uma com ela inteira e outra com ela dividida em partes desiguais, o objetivo também era para que pudessem observar a auto similaridade, ou que falassem que as menores parecem com as maiores.

Analisou-se as respostas da pergunta, observou-se que do total de 100(cem) alunos somente 56(cinquenta e seis), responderam à questão e 44(Quarenta e quatro) alunos não quiseram responder. Eles levaram em conta a figura mais ser um legume, do que ser um objeto geométrico.

As respostas de que a figura se parece com uma arvore é a que mais aparece no resultado com um total de 39(trinta e nove) respondentes, seguida de cérebro, cogumelo e quadrado com 3 (três), flores e retângulo com 2(dois) e alface, colmeia, círculo e bola com apenas 1(um).

Verificou-se também, que alguns ainda permaneciam com intuito de comparação com objetos geométricos euclidianos.

Questão 6 – O que significa Fractal?

O objetivo esperado nessa questão era para que eles dissessem que fractal significa quebrado, foi uma surpresa para o pesquisador, pois dos 100(cem) alunos pesquisados, todos disseram não saber o significado da palavra fractal.

> *Eu cunhei a palavra fractal do aditivo em latim fractus. O verbo em latim correspondente a frangere, que significa quebrar, criar fragmentos irregulares. É contudo sabido – e como isto é apropriado para os nossos propósitos! – que, além de significar quebrado ou partido, fractus também significa irregular. Os dois significados estão preservados em fragmento* (MANDELBROT, 1986).

Desenvolvimento da metodologia de ensino

Ministrou-se aulas de introdução a Geometria Fractal e alguns exemplos de formas encontradas no cotidiano que representam fractais. Questionou-se aos alunos se eles gostariam de estudar outras Geometrias, diferentes daquelas que eles aprendem na escola. Aqueles que responderam negativamente a essa questão justificaram que não gostam de cálculos, outros justificaram que não pretendem seguir a área de exatas em suas vidas educacionais futuras. Mas a maioria dos pesquisados mostrou-se motivado e interessado pelas outras Geometrias, em especial pela Geometria Fractal.

É importante observar que em nenhum momento o questionário dizia que este conteúdo poderia ser incluído no currículo deles. Além disso, os alunos estavam cientes de que o questionário não seria uma forma de avaliação cuja nota influenciaria no seu resultado escolar.

Durante a aula apresentada em multimídia, eles ficaram quietos e atentos à definição e características dos fractais, após ficarem extremamente curiosos ao verem figuras como a de um brócolis, raios, montanhas, rios e um pulmão humano como exemplos de fractais, alguns alunos esclareceram dúvidas, como, por exemplo, o significado da palavra fractal.

Observou-se o comportamento dos alunos durante a aula e verificou-se que os mesmos, num primeiro momento, ficaram temerosos ao saber que aprenderiam uma nova geometria que nunca tinham ouvido falar, mesmo assim, ao virem figuras e imagens presentes no seu cotidiano mostraram-se extremamente motivados.

Logo após a apresentação da aula, aplicou-se o segundo questionário, no qual evidenciou-se que os alunos assimilaram o conteúdo. Apesar de possuírem o material referente à aula em mãos eles não precisaram do mesmo para responder às questões e escreveram com suas palavras tanto na questão que dizia "**Qual objeto fractal na natureza você conhece**?", sendo que 94(noventa e quatro) dos alunos compreenderam e responderam corretamente, 6(seis) alunos não responderam.

Na observação de fractais, os 94(noventa e quatro) que responderam, indicaram algum objeto, sendo eles: Samambaia um total de 34(trinta e quatro), seguido de nuvens 18(dezoito), couve-flor 17(dezessete), brócolis 13(treze), arvores secas 9(nove) e valas dos rios 3(três), o interessante é que por achar que possivelmente poderia ser uma avaliação, ficaram receosos nas respostas, mesmo sendo orientado que não seriam avaliados com notas, responderam apenas um objeto fractal cada.

Perguntou-se sobre a questão referente às aulas mais prazerosas, a grande maioria dos alunos afirmou ter gostado, assim como afirma um aluno: "Eu nunca tinha ouvido falar, mas achei muito interessante e fiquei curioso". Acho que seria, sim, muito prazeroso ter aulas onde a matéria se referencia do nosso cotidiano.

Depois da aplicação dos questionários antes e depois da explicação da Geometria Fractal e as aulas ministradas, verificou-se que os alunos inicialmente, no momento em que souberam que iriam aprender algo novo, tinham ficado um pouco nervosos, mas após terem conhecido esta Geometria, com suas formas complexas, aplicações no cotidiano, e que pode ajudar no aprendizado de conteúdos do Ensino

Médio, os alunos perceberam que a física não é uma ciência abstrata, e que por isso, o importante é estudá-la para perceber onde a física está aplicada, sem receio de que seja complicada.

No final, os alunos afirmaram que gostariam de aprender mais sobre a Geometria Fractal e que os mesmos ficariam muito mais motivados a estudar a física, com seus diversos conteúdos, se durante as aulas fossem apresentadas outras aplicações.

A pesquisa realizada com os alunos foi constituída por uma parte teórica e outra prática. Na teórica foram abordados a origem, a definição, os principais criadores, algumas de suas aplicações e algumas propriedades dos fractais. No entanto, na parte prática, os alunos foram incentivados a construir fractais através de dobraduras a fim de compreender e visualizar duas características importantes por eles apresentadas: a auto semelhança e a complexidade infinita.

Para confecção dos cartões fractais através de dobraduras, foram utilizados materiais como: tesoura, régua e um papel do tamanho A4. Foi solicitado para que os alunos se dividissem em grupos para facilitar o aprendizado.

Figura 37 - Construindo cartão fractal degraus

Fonte: Fotografia registrada pelo autor.

O trabalho de construção de cartões fractais é uma forma interessante e motivadora de apresentar a geometria dos fractais para os alunos de ensino médio, pois é uma atividade que envolve o raciocínio e a concentração do aluno.

Na aplicação desse trabalho percebeu-se que os alunos conseguiram visualizar uma das propriedades dos fractais, a auto similaridade, ou seja, ele mantém a mesma forma e estrutura sob uma transformação de escala e complexidade infinita. Também foi possível observar que as formas geométricas resultantes dos cortes e dobraduras são degraus cada vez menores.

Ao observar o cartão fractal já construído são capazes de identificar que a cada nova iteração tem um degrau cercado por dois novos degraus. Com isso, pode-se concluir que o processo de construção dos degraus em cada iteração é formado pela lei da potência 2^n, onde n representa o número de iterações.

6. CONCLUSÃO

Ao final deste trabalho, percebe-se que hoje há uma deficiência em muitas escolas quando se refere ao ensino da física, pois a disciplina é abordada durante as aulas como algo distante do cotidiano dos alunos.

Diante desse motivo é necessário a inclusão de temas, durante as aulas, que estimulem os alunos, que os motivem e que os façam aprender a física sabendo que aqueles conhecimentos que o professor transmite são uma descrição da natureza e das relações diárias, pois assim, o processo de ensino aprendizagem ocorreria de forma mais satisfatória.

Ao estudar os fractais, por exemplo, pode despertar um fascínio nos estudantes pelas figuras e construções particulares, pode fazê-los acreditar na facilidade em perceber padrões e regularidades e ao mesmo tempo a complexidade, e irá estimulá-los no momento em que eles encontrarem muitas destas formas no seu dia-a-dia. Além disso, ao desenvolver atividades com fractais, as dificuldades em relação à Geometria podem surgir e o professor poderá trabalhar tais conteúdos com seus alunos.

Logo após a aplicação e análise dos questionários verificou-se que a maioria dos alunos nunca ouviu falar da Geometria Fractal, e não gosta de Geometria, fato este justificado pela dificuldade que eles apresentam em compreender a disciplina, pela forma como os conteúdos são transmitidos, pela má estrutura da instituição e dos currículos escolares, a maioria demonstrou sua vontade em participar de aulas mais ilustrativas e agradáveis, com exemplos na vida prática.

Desta forma, os objetivos desta pesquisa foram atingidos, pois, por meio de uma investigação com alunos, foi possível encontrar uma forma clara e objetiva, de tratar o tema fractais trabalhando seus conceitos de uma forma não aprofundada, mas que foi possível apresentar a ideia necessária do que é um fractal e onde ele está presente no cotidiano.

Uns dos exemplos de atividade apresentado neste trabalho foi a confecção de cartões degraus fractais, sendo um dentre muitos outros existentes, como conteúdos de contagem, perímetros, áreas, padrões geométricos, conceitos de medida, sequências, limites, que também podem ser trabalhados, gerando uma grande quantidade de oportunidades de aplicação da Geometria Fractal nas aulas de física.

Depois disso, há diversos benefícios nesta prática, tais como o estímulo à criatividade, ao raciocínio lógico, o aumento da motivação em aprender física, dentre tantos outros benefícios proporcionados por essa Geometria presente no nosso dia-a-dia e que encanta pela beleza de suas formas e construções.

7. BIBLIOGRAFIA

ACADEMINA BRASILEIRA DE LETRAS. − **Revista Brasileira nº 82**. 2015. Disponível em: <http://www.academia.org.br/publicacoes/revista-brasileira-no82>. Acesso em: 20 dez. 2015.

ALMEIDA, R. M. C. − **A Ciência da Complexidade**. Física na Escola, v. 6, n.1, f. 48-53. 2005.

ALMEIDA, T. B.; MARTINELLI, R.O.; RODRIGUES, V. M.; SILVA, A. M. M. − **Fractais no Ensino Fundamental: explorando essa nova geometria**. 2011.

ASSIS, T. A. et *al*. − **Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais.** Revista Brasileira de Ensino de Física**,** v. 30, n. 2, 2304. 2008.

AUSUBEL, D. P. − **The acquisition and retention of knowledge: a cognitive view**. Dordrecht, Kluver Academic Publishers. 2001. 212p.

AUSUBEL, D. P. − **The Psychology of Meaningful Verbal Learning.** New York, Grune & Stratton. 1963. 255f.

AUSUBEL, D. P. − **The acquisition and retention of knowledge: a cognitive view.** Dordrecht, Kluver Academic Publishers. 2000. 212f.

BALDOVINOTTI, N. J. − **O Estudo de Fractais para Futuros Professores de Matemática**. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓSGRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2008, Rio Claro. Anais, Rio Claro: UNESP, 2008a, v.1., p.1 – 14.

BARBOSA, R. M. − **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte. 3. Ed. Autêntica. 2005.

BRASIL. − **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ensino Médio**.** Brasília. MEC. 2000.

_________ − Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Brasília. MEC. 2002.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. − **Investigação qualitativa em educação**. Porto, Portugal, Porto Editora. 1994. 338f.

BORSSOI, J. A. − **Geometria fractal: alguns conceitos e aplicações**. 2005. 39p. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Paraná. 2005.

BRITO, A. J. − **Geometrias Não-Euclidianas: Um estudo histórico-pedagógico**. 1995. 187 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP. 1995.

CAPRA, F. − **A teia da vida – uma nova compreensão científica dos sistemas vivos**. São Paulo, Ed. Cultrix. 1996. 258f.

CARREIRA, A. S. N. *et. al.* − **Fractais**. Disponível em: <http//:www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000 /icm24/principal.htm> Acesso em: 05 jun. 2008.

CAZELLI, S. − **Alfabetização científica e os museus interativos de ciências**. 1992. Dissertação. (Mestrado) - Departamento de Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 1992.

DENCKER, A.F.M. − **Métodos e técnicas de pesquisa em turismo**. São Paulo. Futura. 2001.

EVES, H. − **História da Geometria**. Tradução de Higino H. Domingues. Tópicos de história da Matemática para o uso em sala de aula. São Paulo, Atual. 1992.

FERNANDES, J. A. − **Fractais, uma nova visão da Matemática**. 2007. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Centro Universitário de Lavras- Unilavras, Lavras-Minas Gerais, 2007. Disponível em: < http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/MonografiaFractais.pdf > Acesso em: 30 nov. 2009.

FIEDLER F. J. N. − **O pensar complexo: construção de um novo paradigma**. In: XV Simpósio Nacional de Ensino de Física, 2003, Curitiba. Atas do XV Encontro Nacional de Ensino de Física, 2003. p. 69-81.

GLEICK, J. − **Caos - a criação de uma nova ciência**. Rio de Janeiro. 3. ed. Campus. 1990.

GIL, A. C. − **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo. 3. ed. Atlas. 1996.

JORGE, M. N. − **Física ambiental e teoria da complexidade: possibilidades de ensino na educação básica.** 2009. Dissertação (Mestrado em Física Ambiental) - Instituto de Física, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá-MT, 2009.

LORENZ, E. N. − **A Essência do Caos**. Brasília. Universidade de Brasília. 1996.

MANDELBROT, B. − **The Fractal Geometry of Nature**. San Francisco. Freeman. 1986.

MANDELBROT, B. − **The Fractal Geometry of Nature**. 3. ed. New York. W. H. Freeman. 1983.

MOREIRA, I. C. − **Fractais. Complexidade e Caos**. Rio de Janeiro, Editora UFRJ/ COPEA. 2003.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. − **Aprendizagem significativa: A Teoria de David Ausubel**. São Paulo, Editora Moraes. 1982.

MOREIRA, M. A. − **Aprendizagem significativa: um conceito subjacente**. Actas del II Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo. Burgos. Universidade de Burgos. 1997. f. 19-44.

________ − **Aprendizagem significativa**. Brasília. Ed. Universidade de Brasília. 1999.

_________ − **Aprendizagem significativa crítica**. Porto Alegre. 2005. 47f.

NUNES, A. O. − **Abordando as Relações CTSA no Ensino da Química a partir das crenças e atitudes de licenciandos: uma experiência formativa no Sertão Nordestino**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. 2010.

NOVAK, J. D. − **Aprender criar e utilizar o conhecimento**. Lisboa, Plátano Edições Técnicas. 2000.

NOVAK, J. D.; GOWIN, R. − **Aprender a Aprender**. Lisboa, Plátano Edições Técnicas. 1984.

PAULO, I. J. C. − **A aprendizagem significativa crítica de conceitos da mecânica quântica segundo a interpretação de Copenhagen e o problema da diversidade de propostas de inserção da física moderna e contemporânea no ensino médio.** 2006. 235f. Tese (Doutorado em Enseñanza de las Ciencias), Universidad de Burgos, Burgos – Espanha, 2006.

PAULO, I. J. C.; NETO, M. J.; PAULO, S. R. − **Introdução a Teoria da Complexidade**. Cuiabá, EdUFMT. 2012.

PAULO, S. R.; PAULO, I. J. C.; RINALDI, C. − **Bases conceituais e filosóficas para uma proposta de reestruturação curricular da Educação em Ciências no Ensino Médio.** Grupo de Pesquisa em Ensino de Física – IF – UFMT. 2002.

PRIGOGINE, I. − **As leis do caos.** São Paulo, Editora UNESP. 1996. 202f.

PRIGOGINE, I.; NICOLIS, G.; BABLOYANTZ, A. − **Physics Today**. 25 (12) 1998.

RABAY, Y. S. F. − **Estudos e aplicações da geometria fractal**. 2013. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa-PB, 2013.

SERRA, C. P. − **Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos**. Curitiba. Ed. 20. Editora Universitária Champagnat. 1997.

SONCINI, M. I.; CASTILHO J. M. − **Biologia**. São Paulo. 2. Ed. Cortez. 1990.

TAVARES, A. S. − **Física ambiental e teoria da complexidade: inserção de tópicos essenciais da teoria da complexidade no ensino médio – a viabilidade de uma proposta**. 2011.

WALDROP, M. M. − **Complexity, the Emerging Science at the Edge of Order and Chaos**. Touchstone, New York. 1992.